المسمی
علم حرکت

فہرست مضامین

علم حرکت

اصول ابتدائی

(۱) — علم حرکت مین ذرہ و جسم و خط وغیرہ کے حرکت کا بیان ہوتا ہے

(۲) — علم حرکت کے دو حصہ ہین — **اوّل** — وہ جسمین ذرہ یا خط وغیرہ کے حرکت کا بیان ہوتا ہے یعنی جسمین شئی متحرک کے جسم کا لحاظ نہین کیا جاتا — **دوم** — وہ جسمین شئے متحرک کے جسم کا لحاظ کیا جاتا ہے — یعنی جسمین اوس شی کے حرکت اور اوسکے مقدار جسم کے تعلق کا ذکر ہوتا ہے

(۳) — اس رسالہ کو صرف ذرہ کے حرکت کا بیان کر کے اور ایسی امور کا ذکر کر کے کہ کسقدر طاقت کسقدر جسم پر کسقدر حرکت پیدا کرتی ہے ختم کرینگے — جسم کے ہر ایک طرحکی حرکت کا سمجھنا مشکل ہے — اور فقط ریاضی کے اعلی شاخون کے پڑھنے پر منحصر ہے — یہہ خیال نکرنا چاہیئے کہ ہمین فقط جسمون سے ہی کام پڑتا ہے — ذرون سے نہین — اور اسلئے ذرہ کے حرکت کا بیان کرنا بیفایدہ ہے — بلکہ جسم ذرون کا مجموعہ ہے — اور اگر جسم کا ہر ایک ذرہ

ایک ہی قسم کے حرکت کرتا ہے - پس ایک ذرہ کے حرکت سے
کل جسم کے حرکت معلوم ہوسکتی ہے -
(۴) ذرہ کی... ات کے بیان مین مندرجہ ذیل کا ذکر ہوگا - ۱- کسی
خاص مقام اور وقت پر اوسکی حرکت کسقدر ہے --- ۲- وہ کس طریق مین
حرکت کرتا ہے - ۳- کسی خاص لحظہ مین حرکت کی سمت کیا ہے - اور ذرہ
اوسوقت کس خاص مقام پر مقیم ہے - ۴- کسی مقام سے دوسرے مقام پر پہونچنے
مین کتنا وقت درکار ہے

باب اول سرعت کا بیان

(۵)- کسی شی یا ذرہ کے تبدیلی مقام کو حرکت کہتی ہین - کسی وقت معین پر
کسی ذرہ یا شے کے تبدیلی مقام کے مقدار کو اوس معین وقت کے سرعت کہتی ہین
- سرعت دو قسم کے ہوتی ہے - اول - یکسان - دویم - غیر یکسان یا متبدل
(۶) سرعت یکسان کا بیان - جب کوئی ذرہ برابر وقتون مین برابر فاصلہ
طی کرے خواہ وہ وقت کتنا قلیل یا کتنی ہی دراز فرض کیا جائے تو اوسکی
سرعت کو سرعت یکسان یا مستوی کہتی ہین - اس حالت مین ذرہ کی حرکت
ہر ایک لحظہ مین ایک مقدار مستقیم ہوتی ہے جب حرکت اس قسم کے نہو تو
اوسکو سرعت غیر یکسان کہتی ہین - مثلاً اگر کہا جاوے کہ ذرہ کے سرعت
۳۰ - فٹ فی منٹ ہے تو اوس سے یہہ مراد ہوتی ہے کہ ذرہ ہر ایک منٹ مین
۳۰ فٹ فاصلہ طی کرتا ہے - اور ایک منٹ کے کسی جزو یا نصف مین بہی

۲۰ فٹ کے اوسی جزو یا ضعف طی کرتا ہے - سرعت یکسان کو ہم اکثر مختصراً صرف
سرعت کہینگی -

(۷) - واضح ہو کہ حرکت کے معنی مین وقت اور فاصلہ دونو کا خیال آجاتا ہے
- ہر ایک شخص فاصلہ اور وقت کے معنی جانتا ہے فاصلہ کا ماپ کسی خاص فاصلہ کو اکائی
فرض کرکے ہوتا ہے - یعنی جب کہتی ہین کہ فاصلہ ۵ میل ہے - تو یہہ مراد
ہوتی ہے - کہ فاصلہ ایک میل کا اکائی فاصلہ ہے اور فاصلہ مذکورہ اوسکا
پانچ گنا ہے - یعنی عدد پانچ اوس فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے - اگر ہم بجای ایک میل
کے ایک گز کو اکائی فرض کرکے اوس فاصلہ کو ماپتے تو عدد ۸۸۰۰ اوسی
فاصلہ کو تعبیر کرتا - پس معلوم ہوا کہ جب اکائی مختلف فرض کیجائے - تو وہ
عدد بہی جو کسی خاص فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے مختلف ہوگا - وقت کے ناپ کے
واسطی بہی اکائی کا اختلاف اسطرح سمجہنا چاہئے -

(۸) - اگرچہ اکائی کا فرض کرنا پیمایش کنندہ کی مرضی پر منحصر ہے مگر عموماً آسانی کے
لئے ہر ایک چیز کے پیمایش کے لئے خاص خاص اکائین فرض کیجاتی ہین مثلاً چہوٹے
فاصلہ کے پیمایش کے لئے فٹ اور بڑے فاصلہ کے لئے میل اکائی فرض
کیا جاتا ہے - اسیطرح تہوڑے وقت کے لئے ایک سکینڈ - اور وقت دراز
کے لئے ایک گہنٹہ اکائی فرض کیا جاتا ہے -

(۹) - سرعت کی پیمایش - واضح ہو کہ سرعت سے مراد وقت یا فاصلہ
نہین ہے - بلکہ کسی متحرک شی کے ایک خاص حالت سے ہے جس سے
اوسکی تبدیلی مقام واقع ہوتی ہے - سرعت کے پیمایش کسی خاص سرعت کو

اکائی فرض کرنے سے ہوتی ہے - مثلاً اگر اوس سرعت یکسان کو جس سے کوئی ذرہ ایک منٹ مین حرکت کرکے ایک میل فاصلہ طی کرتا ہے - اکائی فرض کیا جاے - تو جس سرعت سے وہ ذرہ ایک منٹ مین دو میل فاصلہ طی کرے - اوسی عدد ۲ - سے تعبیر کرینگے - اور علیہذ القیاس - سرعت کی اکائی کوئی فرض کیجا سکتی ہے مگر حسکا آسانی کے لئے ایک ایسی سرعت کو اکائی فرض کرتی ہین کہ جس سے کوئی ذرہ اکائی وقت مین اکائی فاصلہ طی کرے - مثلاً جب ایک فٹ - اور ایک سیکنڈ - اکائی فرض کیجاوین - تو اوس یکسان سرعت کو جس سے ذرہ ایک سیکنڈ مین ایک فٹ فاصلہ طے کرے سرعت کے اکائی کہینگے - اور اوس یکسان سرعت کو جس سے ذرہ ایک سیکنڈ مین دو فٹ فاصلہ طی کرے عدد ۲ - سے تعبیر کرینگے اور سے علے ہذا القیاس - اوس یکسان سرعت کو جس سے ذرہ م - فٹ ایک سیکنڈ مین طی کرے - عدد م - سے تعبیر کرینگے - گویا یہہ معلوم ہوا کہ اکائی وقت مین ذرہ کے فاصلہ طی شدہ مین جتنی اکائیون کے تعداد ہو وہی عدد اوسکے سرعت کو ہی تعبیر کرتا ہے - مثلاً جب کہا جاوے کہ ذرہ کی سرعت - ۵ - ہے - تو اوس سے یہہ مراد ہوتی ہے کہ وہ ذرہ ہر ایک اکائی وقت مین یکسان چلکر اکائی فاصلہ کا پانچ گنا فاصلہ طی کرتا ہے -

(۱۰) - علم حرکت مین سرعت یکسان خط مستقیم سے تعبیر کیجاتی ہے - مثلاً فرض کرو کسی لحظہ مین ذرہ نقطہ - ا - پر ہے اور - ا ب - اوسکی خط تحریک ہے اور اوسکی سرعت مستقیم ہے

ب ⟵ ا

اگر ہم خط تحریک مین نقطہ ب - ایسا لین کہ ا ب - کے طول گ - سے متناسب ہو

تو اب سرعت گ کو تعبیر کریگا یعنی ذرہ سرعت گ کے ساتھہ اکائی وقت مین یکسان حرکت سے اچلکر نقطہ ب تک پہونچ جائیگا - حرکت کی سمت کے تعبیر کرنیکی لئے خط اب پر تیر کے پھل کا نشان استعمال کرتی ہین -

(۱۱) - اگر ایک ذرہ سرعت گ سے چلکر وقت س مین فاصلہ ف طی کرے تو ف = گ س ثبوت جب کہتی ہین کہ ذرہ کی سرعت گ ہے تو اوس سے یہہ مراد ہوتی ہے کہ ذرہ اکائی وقت مین فاصلہ کی گ اکائین طی کرتا ہے - اسلئے س وقت مین گ × س اکائین فاصلہ طے کریگا اگر ہمنی اسی فاصلہ ف فرض کیا تھا اسواسطے ف = گ × س -

تنبیہ - حد مذکورہ بالا مین اکائی سرعت وہ حرکت ہے جسمین کہ ذرہ اکائی وقت مین یکسان چلکر اکائی فاصلہ کی طے کرتا ہے - اوسی حد سے یہہ بھی ظاہر ہے کہ ف ∝ س کیونکہ گ غیر متبدل مانا گیا ہے - اور اسیطرح سے جب فاصلہ طی شدہ وقت حرکت سے متناسب ہو تو ہم جانینگی کہ ذرہ کی سرعت یکسان ہے

(۱۲) ایک ہی سرعت مختلف اکائی فاصلہ اور وقت کے ساتھہ اپنی سے مختلف عددون سے تعبیر ہوتی ہے - مثلاً کوی سرعت فی سیکنڈ ۲ گز ہے یہان ایک سکنڈ اور ایک گز کو جداگانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض کرنی سے وہ سرعت عدد ۲ تعبیر ہوگی - اوسی حرکت کو فی سیکنڈ ۶ فٹ بھی کہہ سکتی ہین اسلئے ایک سیکنڈ اور ایک فٹ کو جداگانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض کرنی سے وہی سرعت عدد ۶ سے تعبیر ہوگی - اسیطرح سے اوسی سرعت کو فی منٹ ۱۲۰ گز کہہ سکتی ہین پس ایک منٹ اور ایک گز کو جداگانہ

اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض کرنی سے وہی سرعت عدد ۱۲۰ سے تعبیر ہوگی اور علی ہذا القیاس ۔ فرض کرو کہ جب گ سکینڈ اکائی وقت اور ن فٹ اکائی فاصلہ ہے کوی مفروضہ یکسان سرعت گ سے تعبیر ہے ۔ اور جب ک′ سکینڈ اکائی وقت اور ن′ فٹ اکائی فاصلہ ہو تو وہی سرعت گ′ سے تعبیر ہے ۔ تو گ کی نسبت گ′ سے دریافت کرو پہلی اکائین فرض کرنے سے اکائی سرعت وہ حرکت ہے جس سے کہ ذرّہ ک سکینڈ مین ن فٹ فاصلہ طے کرتا ہے ۔ اسلئے گ سرعت سے یہہ مراد ہے کہ ذرہ ک سکنڈ مین ن × گ فٹ فاصلہ طی کرتا ہے ۔ یعنی ایک سکینڈ مین $\frac{\text{ن} \times \text{گ}}{\text{ک}}$ فاصلہ طے کرتا ہے ۔ اسیطرح دوسری اکائین فرض کرنے سے ذرہ ایک سکنڈ مین $\frac{\text{ن}' \times \text{گ}'}{\text{ک}'}$ فٹ فاصلہ طی کریگا مگر چونکہ حرکت ایک ہے پس $\frac{\text{ن} \times \text{گ}}{\text{ک}} = \frac{\text{ن}' \times \text{گ}'}{\text{ک}'}$ یعنی

$$\frac{\text{گ}}{\text{گ}'} = \frac{\text{ک}/\text{ک}'}{\text{ن}/\text{ن}'} = \frac{\text{دونوا اکائی وقت کی نسبت}}{\text{دونوا اکائی فاصلہ کی نسبت}}$$

(۱۳) ۔ حرکت غیر یکسان کے بیان مین ۔ جب ذرّہ برابر وقت مین برابر فاصلہ طے نہین کرتا تو اوسکی حرکت غیر یکسان کہلاتی ہے ۔ یعنی ذرہ کی سرعت مختلف اوقات مین مختلف ہوتی ہے ۔ مگر کسی لحظہ مفروضہ مین اوسکی سرعت معلوم ہوسکتی ہے ۔ اگرچہ لحظہ مفروضہ کے ماقبل لحظہ مین سرعت مختلف ہوگی کسی لحظہ مفروضہ مین غیر یکسان سرعت کے ماپنے کا قاعدہ ذیل ہے ۔ ہم قیاس کرسکتی ہین کہ ذرّہ کی حرکت بہت تہورے عرصہ تک یکسان ہی اور اوسکا مقدار اوس عرصہ تک ویسا ہی ہے جو اسکی شروع مین تہا

اس حساب سے جتنا فاصلہ ذرہ ایک اکائی وقت مین طے کرتا ہے۔
وہی اوس لحظہ مین اوسکی سرعت کو تعبیر کریگا۔ اسکا یہہ نتیجہ ہے کہ جب
کوئی سرعت ہر ایک لحظہ مین بدلتی جاوے تو اوسکا مقدار دریافت کرنیکے لئے
بہت تہوڑے سے وقت کے لئے اوسے غیر متبدل فرض کرنا چاہئیے جیسے
محیط دایرہ کے پیمایش کے لئے ہم اوسکی بہت چھوٹی حصہ کو خط مستقیم
فرض کرتی ہین

(۱۴) دنیا مین غیر یکسان حرکت کے مثالین یکسان حرکت کے
نسبت زیادہ ہین۔ اور کسی وقت یا فاصلہ مین اوسکے اندازہ کرنیکا طریقہ
بہی آسان ہے۔ مثلاً ہم جانتی ہین کہ ریل گاڑے یکسان سرعت سے
نہین چلتی۔ شروع مین اوسکی سرعت بہت کم ہوتی ہو۔ درمیان مین بہت بڑی ہوتی
ہے۔ اور بعد ازان رفتہ رفتہ گہٹی جاتی ہے۔ مثلاً جب ہم کہتی ہین کہ فاصلہ
طے شدہ درمیان کسی مقام پر اوسکی سرعت ۵۰ میل فی گہنٹہ تہی۔
تو اوسسے یہہ مراد ہے کہ اگر گاڑی ایک گہنٹہ تک اوسی سرعت سے جو اوسجگہ
تہی چلتی تو ایک گہنٹہ مین ۵۰ میل طی کرلیتی۔ اسطرح جب کوی شے اوپر
سے نیچے کے طرف گرتی ہے تو ہم جانتی ہین کہ بباعث کشش ثقل اوسکی سرعت
ہر ایک لحظہ مین بڑہتی جاتی ہے لیکن جب ہم کہتی ہین کہ کسی مفروضہ سکینڈ مین
اوس شے کی سرعت ۳۲ فٹ فی سکینڈ ہے تو اوس سے یہہ مراد ہوتی ہی
کہ اگر وہ شے ایک سکینڈ تک اوسی سرعت سے یکسان چلی تو ۳۲ فٹ
فاصلہ طے کریگی

(۱۵) جب غیر یکسان سرعت کا بیان ہو تو کسی مقام مفروضہ پر کسی لحظہ مفروضہ مین بہت تہوڑے سے وقت تک اوس سرعت کو یکسان سمجہہ کر یکسان سرعت کا قاعدہ اوس خاص مقام پر عمل مین لانا چاہیے - لیکن یہہ یاد رکہنا چاہئیے کہ یہہ اندازہ سرعت کا فقط اوسی تہوڑے سے وقت کے لئے ہی۔ دوسری لحظہ مین سرعت مختلف ہوگے

(۱۶) اس باب کی شروع مین متعلّم کو یاد رکہنا چاہئی کہ سرعت کوی طاقت نہین ہے بلکہ طاقت کا نتیجہ یا اثر ہے یعنی طاقت ذرہ یا جسم پر عمل کرکے حرکت پیدا کرتی ہی اسلئے یہہ کہنا درست نہین کہ سرعت ذرہ یا جسم پر عمل کرتی ہے - اور یہہ بہی یاد رکہنا چاہئیے کہ حرکت کے لئے طاقت کا ذرہ یا جسم پر برابر عمل کرنا ضرور نہین - طاقت تہوڑے دیر عمل کرکے جو حرکت پیدا کریگی اوسی حرکت سے جسم چلتا رہیگا - مثلاً اگر کسی لکڑی سے کسی جسم کو ٹہوکر لگائی جائے تو جب تک لکڑی جسم سے مس کرتی رہیگی تب تک طاقت عمل کریگی لیکن اوسکی بعد بہی جسم متحرک رہیگا - اگر طاقت پی در پی عمل کرے تو ہر ایک لحظہ حرکت بڑہتی جائیگی - اسکا پورا بیان حرکت کی دوسری قانون کے ذکر مین کیا جائیگا

مسئلہ باب اوّل

(۱) - دو نقطہ یکسان سرعت کے ساتہہ چلتی ہین - ایک $\frac{1}{2}$ سیکنڈ مین ۵ فٹ فی سیکنڈ اور دوسرا ۱۰۰ اگز فی منٹ تو ان دونو نقطون کے سرعتون کے

نسبت دریافت کرو جواب ۱۶۲

(۲) ایک ریل گاڑی دو گھنٹہ مین ۱۰۰ میل چلتی ہے تو سکینڈ اور فٹ کی اکایون مین اوسکی اوسط سرعت دریافت کرو جواب ۷۳ $\frac{1}{3}$

(۳) ایک ریل گاڑی ۵ گھنٹہ مین ۱۵۰ میل چلتی ہے تو فٹ اور سکینڈ کی حساب سے اوسکا سرعت دریافت کرو جواب ۴۴

(۴) ایک ریل گاڑی لاہور سے کلکتہ تک ۱۳۰۰ میل فاصلہ ۷۰ گھنٹہ مین طی کرتی ہے تو اوسکی سرعت ایک گھنٹہ مین دریافت کرو۔ اور اوسی حساب سے لاہور سے دہلی تک جو ۳۰۵ میل کی فاصلہ پر ہے کتنی وقت مین پہونچیگی

(۵) زمین اپنے محور پر ۲۳ گھنٹہ ۵۶ منٹ مین ایک دفعہ گھوم جاتی ہے اوسکا قطر ۷۹۲۵ میل ہے تو خط استوا پر کسی ذرہ کی سرعت بحساب فٹ اور سکینڈ کی کیا ہوگی جواب ۱۵۲۵٫۷

(۶) زمین ۳۶۵ دن ۶ گھنٹہ مین سورج کی گرد ایک دفعہ گردش کرتی ہے اگر اوسکی حرکت ایک دایرہ مین ہو جسکا نصف القطر ۹۵۰۰۰۰۰۰ میل ہے تو ایک منٹ مین کتنا فاصلہ طے کریگی

(۷) آفتاب سے زمین پر شعاع کے پہونچنی مین ۸ منٹ ۱۳ سکینڈ صرف ہوتی ہین تو ایک سکینڈ مین شعاع کی سرعت معلوم کرو ۱۸۴۰۰۰ میل

(۸) چاند کا فاصلہ کرہ زمین سے ۲۴۰۰۰۰ میل ہے تو معلوم کرو کہ ایک توپ کا گولہ ہر ایک سکینڈ مین ۵۰۰ گز یکسان حرکت سے چلکر چاند تک کتنی وقت مین پہونچیگا

(۹) کوی پہیہ جسکا قطر ایک گز ہے دو گھنٹہ مین ۵ گز فاصلہ طے کرتا ہے تو پہیہ کی
مرکز اور محیط کی کسی نقطہ کی سرعتون کے نسبت دریافت کرو

(۱۰) میا میر سے امرتسر ۲۵ میل کے فاصلہ پر ہے میا میر مین ۱۲ بجے دن کے
ایک توپ چلی اگر آواز فی سیکنڈ ۱۰۹۰ فٹ فاصلہ یکسان حرکت سے طے
کرے تو امرتسر مین آواز کتنی دیر مین سنائی دیگی   جواب ۲ منٹ ۱ سیکنڈ

(۱۱) کسی بادل سے بجلی چمکی اور ۱۰ سیکنڈ کے بعد گرج سنی گئی۔ بجلی کا چمکنا اور
آواز کا پیدا ہونا ایک ہی لحظہ مین واقع ہوا۔ لیکن بجلی کے چمک کے پہونچنے مین کچھ دیر
نہین لگی تھی۔ اور آواز کی یکسان سرعت فی سیکنڈ ۱۰۹۰ فٹ ہے تو معلوم
کرو کہ بادل کتنی دور ہے   جواب ۲٫۰۶۴ میل

(۱۲) ایک یکسان سرعت ۳ میل فی گھنٹہ ہے اگر گز و منٹ اکائین فرض کیجائین
تو وہ سرعت کس عدد سے تعبیر ہوگی   جواب ۸۸

(۱۳) کوی مسافر یکسان رفتار سے چلکر ۲ گھنٹہ مین ۷ میل فاصلہ طے کرتا ہے اور اسکی
سرعت عدد ۲ سے تعبیر کیجاتی ہے اگر ۱ فٹ اکائی فاصلہ ہو تو اکائی وقت
کیا ہوگی   جواب $\frac{۳۰}{۷۷}$ سیکنڈ

(۱۴) ایک گھڑی چھوٹی سوئی کا طول ۲ انچ ہے اور بڑی سوئی کا $\frac{1}{2}$ ۳ انچ۔ انکی نوکون کی
سرعتون کی نسبت دریافت کرو   جواب ۱ : ۲۱

(۱۵) دو ذرہ کسی ایک نقطہ سے دو خطوط مستقیم کے سمتون مین گ اور گ یکسان
سرعتون کے ساتھہ چلی اونکی سمتون کا زاویہ میلان ۵ ہے تو س وقت
مین ابتدا سے انکا فاصلہ ایک دوسرے سے معلوم کرو

جواب سش = ماگ۱ + گ۲ − ۲ گ گ × جم ی

(۱۶) دو نقطے یکسان سرعت سے چلتی ہین — انمین سے ایک دایرہ کی محیط اور دوسرا اوسکی قطر کو ایک ہی وقت مین طی کرتا ہے — اونکی سرعتون کی نسبت دریافت کرو

جواب ۲۲ : ۷

باب دویم اسراع* کی بیان مین

(۱۷) — سرعت غیر یکسان دو قسم کی ہوتی ہے — اوّل وہ جبکہ سرعت کی کمی یا بیشی یکسان ہو یعنی اوسکے کمی بیشی کا مقدار برابر وقت مین یکسان ہو خواہ وہ وقت کتنا ہی قلیل فرض کیا جاوے دوم وہ جبکہ سرعت کی کمی بیشی کا مقدار برابر وقت مین یکسان نہو

(۱۸) اوّل قسم کی سرعت غیر یکسان مین زیادتی یا کمی درجہ بدرجہ ہوتی ہے اور اوسکی زیادتی یا کمی ذرہ کے وقت حرکت کے تناسب ہوتی ہے — کسی مفروضہ اکائی وقت مین سرعت کی ایسی زیادتی کو اسراع کہتی ہین — لیکن سرعت کے کمی کو نفی زیادتی فرض کرنے سے کچھہ ہرج نہین ہوتا — اسلئے جس عدد سے اسراع تعبیر کیا جاویگا — اوسکے ساتھہ علامت نفی یا اثبات سے معلوم کرنا چاہیے کہ آیا وہ سرعت کی کمی یا زیادتی کو تعبیر کرتا ہے

(۱۹) اسراع یکسان کا بیان — جب ذرہ کی سرعت ہر ایک لحظہ مین یکسان طور سے متغیر ہو تو مشاہدہ سے معلوم ہو سکتا ہے کہ کسی مفروضہ اکائی وقت مین

* چونکہ سرعت تزایدیہ اور سرعت متناقصہ کے لئے کوئی عمدہ لفظ نہین ملا اسلئے اونکی قایم مقام لفظ اسراع کا استعمال کیا گیا ہے

وہ سرعت بمقدار کتنی اکائیں سرعت کے متغیر ہے تو جو عدد سرعت کی ان اکائیوں کو
تعبیر کریگا وہی ذرہ کے اسراع کو تعبیر کریگا۔ مثلاً فرض کرو کہ ایک ذرہ کسی لحظہ میں
۳۲ فٹ فی سیکنڈ سرعت کی ساتھ چلرہا ہے اور اوسکی حرکت درجہ بدرجہ یکسان طور پر
بڑہتی جاتی ہے ۔ اور ایک سیکنڈ کے بعد اوسکی سرعت ۴۰ فٹ فی سیکنڈ
ہے ۔ اور اسکی ایک سیکنڈ کے بعد ۴۸ فٹ فی سیکنڈ ہے ۔ تو ہم
لکھ سکتی ہین کہ ذرہ کا اسراع ۸ ہے یعنی ہر ایک سیکنڈ مین ذرہ کی سرعت ۸ فٹ
فی سیکنڈ بڑہتی ہے۔ اور اسیطرح اگر ایک سیکنڈ کے بعد سرعت کم ہو کر
۲۰ فٹ فی سیکنڈ ہوتی۔ تو ہم کہتی ہین کہ یہان اسراع -۱۲ ہے یعنی یہان ذرہ کی
سرعت ہر ایک سیکنڈ مین بحساب ۱۲- اکایون سرعت کے کم ہوتی ہے ۔ واضح
ہو کہ اسراع کے مقدار ناپنے کے لئے ہمنے اوس اسراع کو اکائی فرض کیا ہے
جس سے ذرہ کی سرعت ایک اکائی وقت مین بحساب ایک اکائی سرعت
کی بڑہتی ہے ۔ یعنی جب ہم کہتی ہین کہ اسراع ۸ ہے تو ہمارے یہہ مراد ہے
کہ وہ اسراع اکائی اسراع کا ۸ گنا ہے ۔ یعنی اگر ذرہ کی سرعت ہر ایک سیکنڈ مین
بحساب اکائی سرعت کے بڑہی ہو ۔ تو اوسکو (۱) اکائی اسراع فرض کیا ہے
مگر سرعت ہر ایک سیکنڈ مین بحساب (۲) اکائی سرعت کے بڑہی تو اوسکو (۲) اکائی
اسراع فرض کیا ہے ۔ اور علی ہذا القیاس

(۲۰) اسطرح جب ہم لکھتی ہین کہ اسراع ع ہے تو سمجھنا چاہیئے کہ ایک اکائی
وقت مین ذرہ کی حرکت یکسان طور سے بحساب ع اکایون سرعت کی بڑہتی ہے
اسلیئے اگر ذرہ اس تبدیل سرعت کے ساتھ اس اکائی وقت تک چلتا ہے

تو اُسکی سرعت بین ع × س اکایین سرعت کی زیادہ ہونگی - اور اگر اُس وقت کے شروع بین ذرہ کی سرعت گ ہو تو س وقت کے انجام بین گ + ع س ہو گی پس اگر س وقت کے انجام بین ذرہ کی سرعت ل سے تعبیر ہو تو

ل = گ + ع س

واضح ہو کہ اگر س وقت کے شروع بین ذرہ ساکن ہو تو مساوات مذکورہ بالا بین گ = ۰ پس اس صورت بین ل = ع س - اگر ذرہ کا اسراع سرعت گ کی سمت مخالف بین ہو تو اُس اسراع کو -ع سے تعبیر کرتے ہین - اور اُس صورت بین ل = گ - ع س

(۲۱) س وقت کے انجام بین ذرہ کے کل سرعت کو اُسکی سرعت محصلہ کہتے ہین اور اُس وقت کی شروع کے سرعت کو اُسکے ابتدائی سرعت کہتے ہین ✦ سرعت محصلہ ہر ایک لحظہ بین بدلتی جاتی ہی یعنے اُسکو غیر یکسان سرعت سمجھنا چاہیے اور حد ۱۳ - بین جو غیر یکسان سرعت کے معنی اور اُسکے ناپنے کا طریقہ بیان کیگئی ہین اسجگہ بھی عمل بین آئینگے ✦

(۲۲) سرعت کی طرح اسراع کو بھی خط مستقیم سے تعبیر کرتے ہین - مثلاً فرض کرو کہ ذرہ کا اسراع مستوی ع ہے یعنی ایک اکائی وقت بین اُسکی سرعت بحساب ع اکایون سرعت کے زیادہ ہوتی ہی - اسجگہہ جو خط مستقیم ع اکایون سرعت کو تعبیر کرتا ہے وھی خط اسراع ع کو بھی تعبیر کریگا پس سرعت اور اسراع بین صرف اتنا فرق ہے کہ سرعت سی ذرہ کے درجہ بدرجہ مقام کی تبدیلی مراد ہی اور اسراع سے اُسکے درجہ بدرجہ سرعت کی

تبدیلی مراد ہی ٭

(۲۳) چونکہ اسراع اکائی سرعت سے ناپا جاتا ہے اِسلئے اکائی سرعت کے مختلف لینے سے ایک ہی اسراع مختلف عددون سے تعبیر ہوگا۔ لیکن اکائی وقت اور اکائی فاصلہ مختلف فرض کرنے سے اکائی سرعت مختلف ہوتی ہی (دیکھو حد ۱۲) لہذا اکائی وقت اور اکائی فاصلہ مختلف فرض کرنے سے خاص اسراع کے تعبیر کرنیوالا عدد بھی مختلف ہوگا٭ مثلاً جہان اکائی وقت ایک سیکنڈ اور اکائی فاصلہ ایک فٹ ہو وہان اکائی سرعت وہ سرعت ہی جس سے ذرہ ایک سیکنڈ مین یکسان حرکت سے ایک فٹ فاصلہ طی کرتا ہے۔ فرض کرو کہ کوئی مفروضہ اسراع عدد ۵ سے تعبیر ہوتا ہی یعنی ہر ایک سیکنڈ مین ذرہ کی سرعت بحساب ۵ فٹ فی سیکنڈ زیادہ ہوتی ہی۔ اب اگر ہم ایک منٹ اور ایک گز کو جداگانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض کرین تو اکائی سرعت وہ سرعت ہوگی جس سے ذرہ ایک منٹ یعنی ۶۰ سکنڈ مین ایک گز یعنے ۳ فٹ فاصلہ طی کرتا ہی اور وہ اسراع اکائی اسراع ہوگا جس سے ذرہ کی سرعت ہر ایک منٹ مین بحساب ایک گز فی منٹ زیادہ ہوتی ہے۔ اب ۵ فٹ فی سیکنڈ برابر ہے $\frac{۵ \times ۶۰}{۳}$ گز فی منٹ اور ہر ایک سیکنڈ مین سرعت کی اس حساب سے تبدیلی برابر ہی ہر ایک منٹ مین اسکے $\frac{۵ \times ۶۰ \times ۶۰}{۳}$ گز فی منٹ کے حساب سے تبدیلی اسلئے وہی مفروضہ اسراع منٹ اور گز کے حساب سے عدد ۶۰۰۰ سے تعبیر ہوگا ٭

(۲۴) جبکہ س سیکنڈ اور ف فٹ جداگانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ ہون کوئی اسراع مفروضہ عدد ع سے تعبیر ہوتا ہی اور وہی اسراع ع' جسے تعبیر

ہوتا ہے۔ جبکہ سؔ سیکنڈ اور فؔ فٹ جداگانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ ہون توعؔ اور عَ کے درمیان نسبت دریافت کرو۔

اول کی اکائین فرض کرنے سے اسرع ع سے یہ مراد ہی کہ ہر ایک سؔ سیکنڈ مین ذرہ کی سرعت بحساب ع × ف فٹ فی سؔ سیکنڈ کے زیادہ ہوتی ہی اب فی سؔ سکنڈ مین سرعت کی زیادتی بحساب ع × ف فٹ فی سؔ سکنڈ کے = فی سؔ سکنڈ مین سرعت کی زیادتی بحساب $\frac{ع \times ف}{س}$ فٹ فی سکنڈ کے = ہر ایک سکنڈ مین سرعت کی زیادتی بحساب $\frac{ع \times ف}{س^2}$ فٹ فی سکنڈ کہ اسی طرح دوسری اکائین فرض کرنے سے اسرع عَ سے یہ مراد ہو ہے کہ ہر ایک سکنڈ مین ذرہ کی سرعت کی زیادتی بحساب $\frac{عَ \times فَ}{سَ^2}$ فٹ فی سکنڈ کے ہی لیکن اسرع ایک ہی ہی

$$\frac{ع \times ف}{س^2} = \frac{عَ \times فَ}{سَ^2}$$

$$\therefore \frac{ع}{عَ} = \frac{\left(\frac{س}{سَ}\right)^2}{\frac{ف}{فَ}} = \frac{\text{ہر دو اکائیون وقت کے نسبت کا مجذور}}{\text{ہر دو اکائیون فاصلہ کی نسبت}}$$

(۲۵) اسرع تبدل کے بیان مین۔ جب ذرہ کے سرعت برابر وقت مین برابر طور پہ کم یا زیادہ نہ ہو یعنی اگر مختلف لحظون مین اُسکی زیادتی یا کمی مختلف ہو تو اُس اسرع کو غیر یکسان کہتے ہین۔ ایسی حالت مین کسی مفروضہ لحظہ مین سرعت کی زیادتی یا کمی کے معلوم کرنیکا طریقہ یہ ہے کہ ہم فرض کرتے ہین لحظہ مفروضہ کے شروع سے ایک اکائی وقت تک اسرع

یکسان رہتا ہے اور اُس کا مقدار وہی ہوتا ہے جو لحظہ مفروضہ کے شروع
مین تھا تو جو عدد اُس کا ہی وقت مین سرعت کی کمی یا زیادتی کو تعبیر کرتا
ہے وہی عدد اُس لحظ کے اسراع کو بھی تعبیر کریگا
واضح ہو کہ بہت تہوڑے سے وقت تک اسراع کو یکسان فرض کرنے سے کچھ
غلطی واقع نہ ہوگی مقدار مستبدل کے ناپنے کا قاعدہ ہر جگہ اسیطرح کا ہے
(دیکھو حد ۱۳)

(۲۶) واضح ہو کہ اسراع ذرہ پر طاقت عاملہ کا اثر ہے - اگر یہ طاقت
مستقل ہو تو اسراع پیدا شدہ بھی یکسان ہوگا یعنی اُس طاقت
کے اثر سے ذرہ کی سرعت ہر لحظہ مین یکسان طور پر زیادہ ہوتی جائیگی اگر وہ
طاقت متحرک ذرہ کی حرکت کے مخالف سمت مین عمل کرے تو اسکے اثر سے موجود
سرعت درجہ بدرجہ گھٹتی جاویگی - اسلئے سمت حرکت کی مخالف سمت کا اسراع
اصل مین ذرہ کی سرعت کو گھٹاتا ہے پس ہم اسطرح کی اسراع کو منفی کہتے ہین
جب طاقت عاملہ کا مقدار مستبدل ہوتا ہے تو اسکے اثر سے متبدل اسراع
پیدا ہوگا - لیکن جب ہم ذرہ کے اسراع کا ذکر کرینگے تو طاقت عاملہ پر
خیال کرنیکی کچھ ضرورت نہین - وہان صرف ذرہ کی حرکت اور قسم حرکت کا خیال کیا کافی
ہے - کونسی طاقت کس قسم اور کس اندازہ کی حرکت پیدا کرتی ہے ان باتونکا بیان
شئے متحرک کی جسم سے تعلق رکھتا ہے اور اسکا بیان آئندہ آویگا

سوالات باب دوم اسراع

(۱) کسی شئے کا اسراع بسبب کشش ثقل کے فی سکنڈ ۲۳۲۰ فٹ کے حساب سے

اگر ½ سیکنڈ اکائی وقت فرض کیجاوے تو وہی اسراع کس عدد سے تعبیر ہوگی

(۲) اگر ۱۰ سیکنڈ اکائی وقت اور ایک گز اکائی فاصلہ ہو تو اسراع ۳۲ فٹ فی سیکنڈ کس عدد سے تعبیر ہوگی — جواب ۱۰۶۶٫۶۶

(۳) اگر م سیکنڈ اور ف فٹ جداگانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض کرنے سے کوئی اسراع عدد ع سے تعبیر ہو تو ایک سیکنڈ اور ایک فٹ اکائیں فرض کرنے سے وہی اسراع کس عدد سے تعبیر ہوگا۔

(۴) اگر ایک فٹ اکائی فاصلہ ہو اور اسراع ۳۲ فٹ فی سیکنڈ اکائی اسراع ہو تو اکائی وقت دریافت کرو — جواب ٫۱۷ سیکنڈ

(۵) ایک میل کو اکائی فاصلہ فرض کرنے سے اگر سرعت ۳۰ میل فی گھنٹہ کی عدد سے تعبیر ہو تو اسراع ۳۲ فٹ فی سیکنڈ کس عدد سے تعبیر ہوگا۔ — جواب ۸۷٫۲۷

(۶) ایک میٹر ۳۷ر۱۹۰ انچ ہوتا ہے تو بتاؤ کہ سیکنڈ اور میٹر کی حساب سے کشش ثقل کس عدد سے تعبیر ہوگی — جواب ۹٫۸

(۷) اگر ۵ سیکنڈ اکائی وقت ہو اور اسراع کشش ثقل عدد ۱۲ سے تعبیر ہو تو اکائی فاصلہ کیا ہوگی — جواب ۵۵٫۵

باب سوم

سرعت اور اسراع کی ساتھ ذرہ کی حرکت کی بیان مین

(۲۷) اسباب مین ہم سرعت اور اسراع سی ہمیشہ یکسان سرعت اور یکسان اسراع مراد لینگے

(۲۸) کسی مفروضہ لحظہ مین ذرہ کی سرعت گ ہے اور وہ سرعت ع اکائی اسراع سے بڑہتی ہے۔ اگر س وقت تک ذرہ اسیطرح حرکت کرتا رہے تو کتنا فاصلہ ہوگا

فرض کرو کہ وقت س کو ن برابر حصون مین منقسم کیا گیا ہے۔ پس ہر ایک حصہ $= \frac{س}{ن}$ چونکہ ہر ایک اکائی وقت مین ذرہ کی سرعت بحساب ع اکائیون اسراع کی زیادہ ہوتی ہے پس شروع سے جداگانہ $\frac{س}{ن}$ و $\frac{۲س}{ن}$ و $\frac{۳س}{ن}$ وغیرہ وقتون کے انجام مین ذرہ کی سرعت جداگانہ $گ + \frac{ع س}{ن}$ و $گ + \frac{۲س ع}{ن}$ و $گ + \frac{۳س ع}{ن}$ ـــ و $گ + \frac{ن س ع}{ن}$ ہوگی (بموجب حد ۲۰)

فرض کرو اگر ذرہ ہر ایک حصہ وقت مین اوس حصہ کے انجام تک اوس حصہ کی ابتدائی سرعت سے یکسان طور پر چلتا تو $ف_۱$ فاصلہ طے کرتا اور اگر وہ ذرہ ہر ایک حصہ وقت مین اوس حصہ کی انجام تک اوسی حصہ کی انجام کی سرعت سے یکسان طور پر چلتا تو $ف_۲$ فاصلہ طے کرتا

$$\therefore ف_۱ = گ \times \frac{س}{ن} + \left(گ + \frac{س ع}{ن}\right)\frac{س}{ن} + \left(گ + \frac{۲س ع}{ن}\right)\frac{س}{ن} + \cdots + \left(گ + ع(ن-۱)\frac{س}{ن}\right)\frac{س}{ن}$$

$$\therefore ف_۱ = گ س + ع \times \frac{س^۲}{ن^۲}\left\{۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (ن - ۱)\right\} = گ س + \frac{ع س^۲}{۲ن^۲}\, ن(ن-۱) = گ س + \frac{ع س^۲}{۲}\left(۱ - \frac{۱}{ن}\right)$$

اسیطرح سی

$$ف_۲ = \left(گ + ع\frac{س}{ن}\right)\frac{س}{ن} + \left(گ + ع\frac{۲س}{ن}\right)\frac{س}{ن} + \cdots + \left(گ + ع\frac{ن س}{ن}\right)\frac{س}{ن}$$

$$= گ س + \frac{ع س^۲}{ن^۲}\left(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ن\right)$$

$= گ س + \frac{ع س^2}{۲} (۱ + \frac{۱}{ن})$

مگر حقیقت مین کسی کل حصہ وقت مین ذرہ کی سرعت یکسان نہین ہے بلکہ ذرہ کی اصل سرعت اُس حصہ کی ابتدائی و انجام کے سرعتون کی درمیان واقع ہے اور خواہ اوس حصہ وقت کو کتنا ہی قلیل فرض کیا جائے تب بھی یہی کہہ سکینگے۔ کیونکہ ذرہ کی سرعت ہر لحظہ مین زیادہ ہوتی جاتی ہے پس اصل مین جتنا فاصلہ ذرہ س وقت مین طے کرتا ہے وہ ف۱ و ف۲ کے درمیان واقع ہے اور خواہ ہر ایک حصہ وقت کتنا ہی قلیل فرض کیا جاوے تب بھی یہی کہہ سکینگے

مگر $\frac{س}{ن}$ کو بہت ہی قلیل فرض کرنے سے یعنی ن کو بہت کثیر فرض کرنے سے ف۱ و ف۲ دونو گ س + $\frac{ع س^2}{۲}$ کے برابر ہو نگی کیونکہ $\frac{۱}{ن}$ بہت ہی قلیل ہوکر برابر صفر کے ہو جاتا ہے۔ پس اگر اصل فاصلہ طے شدہ ف سے تعبیر ہو تو ف $= گ س + \frac{ع س^2}{۲}$

(۲۹) مساوات مذکورہ بالا اور طرح بھی ثابت ہو سکتی ہے۔ چونکہ ذرہ کی سرعت یکسان طور پر بڑہتی ہے۔ پس نصف وقت کے اخیر مین ذرہ کی سرعت ابتدا اور انجام کی سرعتونکا اوسط ہے یعنے اگر نصف وقت سے بیشتر اور بعد برابر وقفون پہ دو لحظون کی سرعت کا لحاظ کیا جاوے تو معلوم ہوگا کہ پہلی لحظہ کی سرعت نصف وقت کی سرعت سے اُتنی کم ہے جتنی کہ بعد کے لحظہ کی سرعت نصف وقت کی سرعت سے زیادہ ہے۔ پس ذرہ س وقت مین اوتنا ہی فاصلہ طے کریگا جو کہ وہ اوسط سرعت کے ساتھہ برابر یکسان چلکر اوسی عرصہ مین طے کرتا مگر اوسط سرعت $= \frac{۱}{۲}(گ + گ + ع س) = گ + ع \frac{س}{۲}$

$$\therefore ف = (گ + ع \frac{س}{۲}) س = گ س + \frac{گ س^۲}{۲}$$

(۳) ثابت ہوچکا کہ ذرہ کی سرعت محصلہ ل = گ + ع س . . . . . . (۱)
اور فاصلہ طے شدہ ف = گ س + $\frac{ع س^۲}{۲}$ . . . . (۲)

$$\therefore ل^۲ = گ^۲ + ۲ گ ع س + ع^۲ س^۲ = گ^۲ + ۲ ع (گ س + ع \frac{س^۲}{۲})$$

= گ^۲ + ۲ ع ف . . . . . (۳)

ان تین مساواتون سے ذرہ کی حرکت ہر ایک حالت مین معلوم ہو سکتی ہے

(۱۳) جب ذرہ کی سرعت گھٹتی جاتی ہے یعنی جب اسراع سرعت کے مخالف سمت مین موجود ہوتا ہے تب اسراع ع کو علامت نفی سے تعبیر کرنا چاہئے اسر صورت مین مساواتین مذکورہ بالا اسطرحپر لکھی جائینگی

ل = گ − ع س . . . . (۱)
ف = گ س − $\frac{ع س^۲}{۲}$ . . . . (۲)
ل^۲ = گ^۲ − ۲ ع ف . . . . (۳)

(۲۳) اگر س وقت کے ابتدا مین ذرہ ساکن ہوتا تو گ = ۰ ∴ ل = ع س
ف = $\frac{ع س^۲}{۲}$ . . . (۲) ل^۲ = ۲ ع ف . . . . . . (۳)

واضح ہو کہ چونکہ اسراع یکسان ہو تو اس لئے مساوات نمبر (۲) و (۳) سے بیان ذیل معلوم ہوتا ہے

(۱) کہ جب ذرہ حالت سکون سے متحرک ہوتا ہے تو کسی مفروضہ وقت مین فاصلہ طے شدہ وقت کی مجذور کی متناسب ہوتا ہے اور اسکے برعکس جب کسی وقت مفروضہ مین فاصلہ طے

شدہ وقت کے مجذور کے متناسب ہو تو معلوم ہوگا کہ ذرہ کا اسراع یکساں ہے

(۲) — ذرہ حالت سکون سے متحرک ہو کر جو کچھ فاصلہ طے کرتا ہے وہ فاصلہ اوسکے انجام مین سرعت محصلہ کی مجذور کی تناسب ہوتا ہے

(۳۳) تعریف ۔ اگر حالت سکون سے یکسان اسراع سے ذرہ ف فاصلہ طے کرنے مین (ل) سرعت حاصل کرے تو ل کو ذرہ کی سرعت محصلہ ف فاصلہ مین کہینگے

(۳۴) دفعہ ۲۸ مین ثابت ہوا ہے کہ ذرہ ابتدائی سرعت گ اور اسراع ع سے چلکر س وقت مین گ س + ½ ع س٢ فاصلہ طے کرتا ہے پس (س-۱) وقت مین ذرہ گ (س-۱) + ½ ع (س-۱)٢ فاصلہ طے کرتا ہے تو س وین اکائی وقت مین فاصلہ طے شدہ

= گ س + ½ ع س٢ - {گ (س-۱) + ½ ع (س-۱)٢}

= گ + ½ ع (۲س - ۱)

یعنی اول اکائی وقت مین فاصلہ طے شدہ = گ + ½ ع۔

دوسری اکائی وقت مین فاصلہ طے شدہ = گ + ³⁄₂ ع وغیرہ

اگر ذرہ حالت سکون سے متحرک ہو تو گ برابر صفر کے ہوتا اس صورت مین

اول اکائی وقت مین فاصلہ طے شدہ = ع/۲

دویم مین .... = ۳ع/۲

سیوم مین .... = ۵ع/۲ وغیرہ

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اول دویم سیوم وغیرہ اکائیون وقت مین

فاصلہ طے شدہ جداگانہ عدد ۱ و ۳ و ۵ وغیرہ طاق اعداد کی متناسب ہے

(۳۵) ـــ کوی ذرہ کسی نقطہ (ا) سے گ سرعت سے خط اب کے سمت مین چلتا ہے اوسکا اسراع ـــ ع ہے تو ذرہ کا وقت حرکت جب وہ مقام ب پر پہنچتا ہے معلوم کرو اور اوسکی آیندہ حرکت کا حال دریافت کرو۔

فرض کرو کہ فاصلہ اب = ف اکایون فاصلہ کے اور وقت حرکت = س اکایون وقت کے ہے تو بموجب دفعہ ۲۸ ف = گ س ـــ $\frac{ع س^۲}{۲}$

∴ ع س۲ ـ ۲ گ س + ۲ ف = ۰

$$∴ س = \frac{گ \pm \sqrt{گ^۲ - ۲ ع ف}}{ع}$$

اس مساوات سے ہم مندرجہ ذیل نتایج نکالتے ہین

(۱) اگر گ۲ < ۲ ع ف تو س کی قیمت ناممکن ہے ـ یعنی اس حالت مین ذرہ مقام ب تک نہین پہونچ سکتا

(۲) اگر گ۲ = ۲ ع ف تو س = $\frac{گ}{ع}$

مگر بموجب حد (۲) ل = گ ـ ع س = ع ($\frac{گ}{ع}$ ـ س)

گویا $\frac{گ}{ع}$ وقت کے بعد ل = ۰

وقت $\frac{گ}{ع}$ کے بعد ل کے قیمت نفی ہو گی یعنی ذرہ کی سرعت محصلہ اصل سمت حرکت کی مخالف سمت مین ہو گی ـ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ذرہ صرف مقام ب تک پہونچتا ہے اور آگے نہین چلتا اور ایک لحظہ تک نقطہ ب پر ٹھیر کر سمت مخالف مین لوٹنا شروع کرتا ہے

(۳) اگر $گ^{۲} > ۲ع ف$ — تو س کے دو قیمتین ہو سکتی ہین

بموجب جبر و مقابلہ کے صورت مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ دونو قیمتین مثبت ہونگی یعنی اسصورت مین ذرہ مقام ب پر دو دفعہ گذریگا ایک دفعہ اصل سمت مین حرکت کرتی ہوئی اور دوسرای دفعہ اپنا کل فاصلہ طے کرکے مخالف سمت مین لوٹتی ہوئے

چونکہ ل = گ − ع س اسلیے $\frac{گ}{ع}$ وقت کے بعد ل = ۰ یعنی $\frac{گ}{ع}$ وقت تک چلکر ذرہ ایک لحظہ تک ساکن رہکر سمت مخالف مین لوٹنا شروع کریگا اور $\frac{گ}{ع}$ وقت مین فاصلہ طے شدہ

$= گ س - \frac{ع س^{۲}}{۲} = \frac{گ^{۲}}{ع} - \frac{ع گ^{۲}}{۲ع^{۲}} = \frac{گ^{۲}}{۲ع}$ — یعنی ذرہ $\frac{گ^{۲}}{۲ع}$ اکائین فاصلہ کی طے کرکے سمت مخالف مین لوٹنا شروع کریگا

(۴) جب ذرہ فاصلہ $\frac{گ^{۲}}{۲ع}$ طے کرکے لوٹنا شروع کرتا ہے تو ہم کہہ سکتی ہین کہ ذرہ حالت سکون سے اسراع + ع کے ساتھ نقطہ ۱ کے سمت مین حرکت کرتا ہے

∴ اگر نقطہ ۱ تک پہونچنے مین وقت سَ صرف ہو تو $\frac{گ^{۲}}{۲ع} = \frac{۱}{۲} ع سَ^{۲}$

∴ $سَ = \frac{گ}{ع}$

اس سے ظاہر ہے کہ جتنا وقت ذرہ کو نقطہ ۱ سے اپنا کل فاصلہ اصل سمت مین طے کرنے مین صرف ہوتا ہے اوتنا ہے وقت واپس نقطہ ۱ تک پہونچنے مین صرف ہوتا ہے اور نقطہ ۱ سے چلکر پھر نقطہ ۱ پر واپس آنے مین ۲ $\frac{گ}{ع}$ وقت صرف ہوتا ہے

(۵) $\text{ل} = \text{گ} - \text{ع}\,\text{س}$ ∴ ابتدا سے $\frac{۲\,\text{گ}}{\text{ع}}$ وقت کی انجام مین ذرہ کی سرعت محصلہ $= \text{گ} - \text{ع} \times \frac{۲\,\text{گ}}{\text{ع}} = -\,\text{گ}$

اس سے ظاہر ہے کہ جب ذرہ نقطہ ا پر لوٹ آتا ہے تو اوسکی سرعت عدداً ابتدائی مقدار حرکت کے برابر ہوتی ہے مگر سمت مین مخالف

(۲۶) ذرہ کا وقت واپس نقطہ ا تک پہونچنے مین ایک اور طریقہ سے بھی دریافت ہو سکتا ہے ہم جانتے ہین کہ س وقت مین فاصلہ طے شدہ

$= \text{گ}\,\text{س} - \frac{۱}{۲}\,\text{ع}\,\text{س}^{۲}$

نقطہ ا پر ذرہ کا فاصلہ طے شدہ = ۰ پس اگر ذرہ اپنا کل فاصلہ طے کرنے اور نقطہ ا تک واپس آنے مین وقت س صرف کرے

تو $۰ = \text{گ}\,\text{س} - \frac{۱}{۲}\,\text{ع}\,\text{س}^{۲}$

$\therefore \text{س} = ۰ \text{ یا } \frac{۲\,\text{گ}}{\text{ع}}$

س کی اول قیمت اوس وقت کو تعبیر کرتی ہے کہ جب ذرہ نقطہ ا سے حرکت کرنیکو تیار ہے

س کی دوسری قیمت اوس وقت کو تعبیر کرتی ہے کہ جب ذرہ نقطہ ا سے چلکر اپنا کل فاصلہ طے کرکے واپس نقطہ ا پر پہونچ جاتا ہے

اسطرح چونکہ $\text{ل}^{۲} = \text{گ}^{۲} - ۲\,\text{ع}\,\text{ف}$ جب ذرہ اپنا کل فاصلہ اصل سمت مین طے کر چکتا ہے تو ل = ۰ ∴ $۰ = \text{گ}^{۲} - ۲\,\text{ع}\,\text{ف}$ ∴ کل طے شدہ فاصلہ (ف) $= \frac{\text{گ}^{۲}}{۲\,\text{ع}}$ طالبعلم خود فہم سا نتائج مذکورہ بالا سے بہت سے نتائج خود نکال سکتا ہے جنکا اس جگہ بیان کرنا فضول ہے

(۸۳) تجربے سے معلوم ہوا ہے کہ جب کوئی شے اوپر سے نیچے کیطرف پہینکی جاوے یا خود گرے تو اوسکی سرعت کشش زمین کے باعث ایک یکسان اسراع سے بدلتی جاتی ہے اس اسراع کی ناپ تقریباً فی سیکنڈ ۲ ، ۳۲ فٹ ہے - آسانی کے لیئے اس خاص اسراع کو ہمیشہ حرف ق سے تعبیر کیا جایگا

اس تبدیلی مقدار حرکت کے خواص اور اوسکی ناپنے کا طریقہ وغیرہ آئندہ بیان ہوگا - اسجگہہ اتنا ہی فرض کافی ہے کہ کشش ثقل سے کسی متحرک جسم کی سرعت بحساب ق اسراع کے زمین کے مرکز کیطرف زیادہ ہوتی ہے

پس ظاہر ہے کہ اگر ہم کسی جسم کی حرکت جو سمت الراس مین پہینکا گیا ہو یا گرا ہو معلوم کرنا چاہین تو کل نتایج جو ہمنے ضمن مذکورہ بالا مین بابت یکسان اسراع کی ثابت کر چکے ہین اسجگہہ بہی عمل مین آوینگے - فرق صرف اتنا ہی ہوگا کہ جہان ہمنے اون حدود مین اسراع کے واسطے حرف ع رکھا ہے وہان اوسصورت مین جب جسم نیچے کیطرف گرتا ہو (+ ق) اور جب اوپر کیطرف چڑہتا ہو (- ق) رکھنا چاہیے -

اس باب کے اخیر مین بہت سے مثالین کشش ثقل کے متعلق دی گئی ہین جن سے مختلف حالتون مین ذرہ کی حرکت کا حال معلوم ہوگا

باب چہارم مین ہم اوس جسم کی حرکت کا حال بیان کرینگے جو غیر سمت الراس مختلف سمت مین پہینکا گیا ہو یا گرا ہو - جب ہم کہتے ہین کہ ذرہ حرکت کرتا ہے تو ہمارے مراد ہمیشہ یہہ ہوتی ہے کہ ذرہ خلا مین حرکت کرتا ہے کیونکہ ہوا کا اثر ذرہ کی حرکت مین اسقدر تبدیلی پیدا کرتا ہے کہ اوسکا

بیان اس رسالہ اتبدائی مین نہین کیا جا سکتا

مثالات باب سوم

(۱) کسی ذرہ کا اسراع ۵ ہے تو ابتدا سے کتنی وقت مین اوسکی سرعت
برابر ۲۰ کے ہوگی اگر ذرہ کی سرعت ابتدائی ۵ ہوتی تو کتنی وقت مین سرعت
محصلہ برابر ۲۰ کے ہوگی جواب (۱) ۴ اکائی وقت (۲) ۳ اکائی

(۲) کوئی ذرہ جسکی سرعت ابتدائی ۲ ہے اسراع یکسان سے حرکت کرتا ہے
ابتدا سے جبکہ ۸ اکائی وقت کی انجام مین اوسکی سرعت محصلہ برابر ۲۵ کے ہوتی
ہے تو اوسکا اسراع دریافت کرو جواب ۱۰

(۳) کسی ذرہ کی سرعت بحساب ۳۲ اکائیون اسراع کے کم ہوتی ہے
کسی معین لحظہ مین معلوم ہوا کہ اوسکی سرعت ۹۶ ہے تو کتنی وقت
مین ذرہ حالت سکون کو پہونچ جائیگا جواب ۳ اکائی وقت

(۴) کسی ذرہ کا سرعت ابتدائی ۵ ہے - اور اوسنی شروع سے
۳ اکائیون وقت مین ۱۱۸ اکائیین فاصلہ کی طے کین - تو اوسکا اسراع
دریافت کرو جواب ۶

(۵) کسی ذرہ کی سرعت ابتدائی ۱۰ ہے ۴ اکائیون فاصلہ کے طے کرکر
وہ سرعت ۸ حاصل کرتا ہے تو اوسکا اسراع دریافت کرو

جواب - ۶

(۶) کسی ذرہ کا اسراع ۵ فی منٹ بحساب ۳۰۰ گز ہے توبتلاؤ کہ حالت سکون سے چلکر کتنا فاصلہ طے کرنے مین اوسکے سرعت محصلہ برابر ۲۰ فٹ فی سکینڈ کی ہوسکے

جواب ۱۸۰۰ فٹ

(۷) دیکھا گیا کہ کسی مفروضہ سیکنڈ مین ذرہ ۷ فٹ فاصلہ طے کرتا ہے اور اوس سیکنڈ کے تیسری اور چوتھی سیکنڈ مین جدا گانہ ۱۱ و ۱۵ فٹ فاصلہ طے کرتا ہے توبتلاؤ آیا ذرہ کا اسراع یکسان یا غیر یکسان ہی اور اسراع کا تعداد سہے دریافت کرو

جواب (۱) یکسان (۲) ۲

(۸) کسی ذرہ کی سرعت ابتدا گ ہے اور اوسکی سرعت بحساب ع اسراع کے زیادہ ہوتے ہے اگر ذرہ وقت س مین ف فاصلہ طے کرے اور اوسوقت کی انجام مین اوسکے سرعت محصلہ ل ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ل - گ}{ع} = \frac{۲ ف}{ل + گ} = س$$

(۹) کوی ذرہ اسراع ع سی حرکت کر رہا ہے اگر ف فاصلہ کی ابتدا اور انجام کے سرعتون کا اوسط برابر ۸ کے ہو اور اس فاصلہ کے طے کرنے مین اوسکے سرعت مقدار د سے زیادہ ہوئے ہو تو ثابت کرو کہ ۸ د = ع ف

(۱۰) دیکھا گیا کہ کوہی ذرہ پہلی چار سیکنڈ مین ۴۴ فٹ فاصلہ طے

کرتا ہے اور دوسری ۴ سیکنڈون مین ۴۲ فٹ - تو اوسکی سرعت
ابتدائی و اسراع دریافت کرو جواب (۱) ۱
(۲) ۵ئ۲

(۱۱) کوی ذرہ سرعت ابتدای گ سے حرکت کرکے س وین
و سؔ وین سیکنڈمین جدا گانہ ف و فؔ فاصلہ طے کرتا ہے
تو ن وین سیکنڈمین کتنا فاصلہ طے کریگا

$$\text{جواب گ} + \frac{(\text{ف} - \text{فؔ})\ (\text{ن} - ۱)}{۲\ (\text{س} - \text{سؔ})}$$

(۱۲) کوی ذرہ حالت سکون سے اسراع ۸ سے حرکت کرتا ہوا
۵ سکنڈمین ۵۰ فٹ فاصلہ طے کرتا ہے اور اوسوقت کے انجام
مین اوسکی سرعت محصلہ ۲۰ ہے تو سمجھہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ
کیا ہے جواب اکائی وقت = ۲ سکینڈ اکائی فاصلہ = ۲ فٹ

(۱۳) کوی ذرہ کسی نقطہ مفروضہ سے اسراع ع یکسانیت حرکت کرتا ہے
اور س سیکنڈ کے بعد ایک اور ذرہ ۱ اوسے نقطہ سے سرعت یکسان
گ سے چلا تو ثابت کرو کہ اگر گ > ۲ ع س تو دونو ذرہ ایکدوسری
سے دو دفعہ اگر ملینگے

(۱۴) کوی ذرہ حالت سکون سے اسراع یکسان کیساتھہ حرکت کرتا ہے
اور س وین و سؔ وین سیکنڈمین جدا گانہ ف و فؔ فاصلہ طے کرتا ہے
تو دریافت کرو کہ (س + سؔ) وین سیکنڈمین کتنا فاصلہ طے

کریگا   جواب $ف + ف' + \frac{ف' - ف}{۲(س - س')}$

مثالات مندرجہ ذیل کشش زمین کے باعث سے گرتی ہوئی جسمون کے حرکت کی متعلق ہین۔ اور سوای اون مقامون کے جہان اسکے عکس لکھا جاوے ہمیشہ اسراع برابر ۳۲ فٹ فی سیکنڈ فرض کرنا چاہئے

(۱۵) دریافت کرو کہ کوی نیچے گرتا ہوا جسم ۹ سیکنڈ مین کتنا فاصلہ نیچے گریگا   جواب ۱۲۹۶ فٹ

(۱۶) کوی نیچے گرتا ہوا جسم اول و دوم و سیوم سیکنڈ مین جداگانہ کتنا فاصلہ نیچے گرتا ہے   جواب ۱۶ و ۴۸ و ۸۰ فٹ

(۱۷) کوی جسم ابتدای سرعت ۸۰ فٹ فی سیکنڈ کے ساتھہ اوپر کیطرف سمت الراس مین پھینکا گیا تو معلوم کرو کہ وہ کتنی اونچای تک چڑھ سکیگا   جواب ۱۰۰ فٹ

(۱۸) قطب صاحب کی میناکی چوٹی سے جسکی اونچائی ۲۵۰ فٹ ہے کوی جسم گرا تو دریافت کرو کہ کتنی وقت مین سطح زمین پر پہونچیگا۔ اور یہہ بھی بتلاو کہ اگر جسم مذکور زمین پر ایک سیکنڈ مین آپہونچے تو کتنی سرعت ابتدا سے پھینکا گیا ہوگا   جواب (۱) قریبًا ۴ سیکنڈ (۲) ۱۳۴

(۱۹) کسی گرتے ہوئی جسم کے ۲۵۰ فٹ فاصلہ نیچے گرنے مین سرعت کیا ہوگے   جواب ۱۲۰

(۲۰) ایک گولی سرعت ۱۰۰ فٹ فی سیکنڈ کے ساتھہ اوپر کیطرف سمت الراس مین محذوف ہوئی اور ایک سیکنڈ کے بعد ایک اور گولی او

مقام سے سرعت ۲۰۰ فٹ فی سیکنڈ کے ساتھہ اوسی سمت پھینکا گیا ہو — تو معلوم کرو کہ کس جگھہ اور کتنی دیر مین دونو ایک دوسری سے ملینگی

جواب (۱) ۲۸۴ فٹ

(۲) ۲٫۶ سیکنڈ

(۲۱) کوی ذرہ ایک مینار کے چوٹی سے گرا اور اوسی لمحہ مین ایک اور ذرہ اوسی مینار کے تلے سے اوپر کیطرف پہینکا گیا دونو ذری مینار کے عین وسط مین آکر ملے — تو دریافت کرو کہ دوسری ذرہ کی سرعت ابتدا سے حذف کیا تہی

جواب $\sqrt{\text{ق} \times \text{طول منیار}}$

(۲۲) کوئی نیچے گرتا ہوا جسم گرنیکی اخیر سیکنڈ مین کل گرنیکی اونچائی کا $\frac{1}{\text{ن}}$ حصہ گرا تو اوسکی کل گرنے کا ارتفاع اور کل وقت گرنیکا معلوم کرو

جواب وقت گراو = ن ± $\sqrt{\text{ن (ن − ۱)}}$

(۲۳) کوی نیچی گرتا ہوا جسم اپنے گرنے کے اخیر سکینڈ مین اپنی کل گرنیکی اونچائی کا $\frac{1}{۴}$ حصہ گرا تو اوسکی کل گرنے کی اونچائے اور کل وقت گرنیکا معلوم کرو

جواب اونچائی = ۴۰۵ فٹ اور وقت = قریباً $\frac{1}{۲}$ ۵ سکینڈ

(۲۴) کوی جسم سرعت ۵ فٹ فی سکینڈ کے ساتھہ نیچی محذوف ہوا — ۱۰ سکینڈ کے بعد ایک اور جسم اوّل جسم کے ۸ گنا سرعت کی ساتھہ اوپر کیطرف محذوف ہوا تو معلوم کرو کہ کتنی دیر مین دونو ملینگے

جواب ۸۰ سکینڈ

(۲۵) کوی جسم کسی مفروضہ بلندی سے نیچی گرا — ۳ سکینڈ کے بعد

ایک اور جسم اوّل کے مقام گراو کے ۴۰۰ فٹ نیچی سے گرا۔ تو معلوم کرو کہ دونو کتنی دیر مین اور کس مقام پر ملینگی

جواب (۱) ۱۹۶ فٹ (۲) ۷۵ء۷ سیکنڈ

(۲۶) کوی پتھر ایک کنوین مین گرا س سیکنڈ کے بعد اوسکی پانی پر پہونچنے کے آواز آئی آواز کے آنے کے سرعت یکسان ۱۰۹۰ فٹ فی سیکنڈ ہے یعنی = ۴ ۳ ق تو دریافت کرو کہ پانی کے سطح کنوئین کے دہانے سے کتنی نیچی ہے جواب اگر ن تعداد فٹ مطلوبہ ہو

تو ن + ۳۴ ۲ ق ن = ۳۴ ق س

(۲۷) جب کوی ذرہ مفروضہ ارتفاع سے ن فٹ گر چکا تو اوس لحظہ مین ایک اور ذرہ اوسی اونچائی سے نیچی محذوف ہوا اور س سیکنڈ کے انجام مین اوّل ذرہ کی ساتھ آملا تو دریافت کرو کہ دوسرا ذرہ کتنی سرعت کے ساتھ محذوف ہوا جواب ن/س + ۲ ق ن

۲۸۔ کوی ذرہ ۴۰۰ فٹ کی اونچائی سے گرا اور جب وہ ۵۰ فٹ نیچی گر چکا تو ایک اور ذرہ ایسی سرعت سے محذوف ہوا کہ دونو سطح زمین پر ایک ہی لحظہ مین پہونچے تو دریافت کرو کہ دوسری ذرہ کی حذف کے سرعت کیا تہی جواب ۴۲

۲۹ کوی ذرہ کسیقدر سرعت سے اوپر کیطرف محذوف ہوا اور دیکہا گیا کہ ذرہ کو ایک مقام پر جسکی بلندی ا فٹ ہے گذر جاتی اور وہان واپس آنے مین س سیکنڈ لگے تو ذرہ کے پہنکنے کے سرعت دریافت

کرو جواب اگر گ برابر سرعت مطلوبہ کے ہو تو

$$گ^2 = \frac{س^2 ق^2}{4} + 2 ق ا$$

(۳۰) کسی ذرہ کی سرعت ۳۷ فٹ فاصلہ طے کرنی مین ۱۶ فٹ فی سیکنڈ سے ۲۰ فٹ فی سکنڈ ہو گئے تو اوسکا اسراع اور کل وقت حرکت دریافت کرو

جواب (۱) ۱ (۲) ۲۰

(۳۱) کسی ذرہ کی سرعت ۹ فٹ فاصلہ طے کرنے مین ٹہکر ۲ فٹ فی سیکنڈ ہو گئی تو اوسکا اسراع اور کل فاصلہ طے شدہ معلوم کرو۔

جواب (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲۵

(۳۲) کسی ذرہ کا اسراع اتنا ہے کہ $\frac{1}{2}$ اسیکنڈ تک حرکت کرنے مین اوسکی سرعت محصلہ استقدر ہو جاتی ہے کہ اوسکی ساتھہ یکسان طور پر چلکر $\frac{1}{2}$ اسیکنڈ مین ۸ فٹ فاصلہ طے کر سکتا ہے تو ذرہ کا اسراع کیا تھا

جواب ۳۲

(۳۳) دیکھا گیا کہ کسی ذرہ نے دو متواتر سیکنڈ مین عداگانہ ۸۰ فٹ و ۱۱۲ فٹ فاصلہ طے کیا تو اوسکا اسراع اور کل وقت حرکت دریافت کرو

جواب (۱) ۳۲ (۲) ۴

(۳۴) کوی جسم ایسی سرعت کی ساتہہ اوپر کیطرف محذوف ہو کہ جس سے وہ ۲۰ ق اونچای تک بلند ہو سکتا ہے تو دریافت کرو کہ کتنی وقت کی بعد اوس جسم کی نیچی گرنے کے سرعت برابر ق کے ہو گے

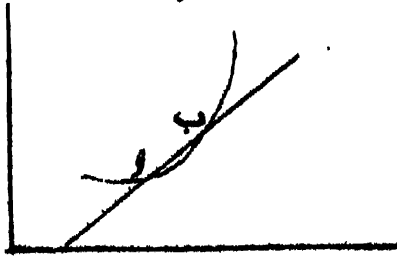
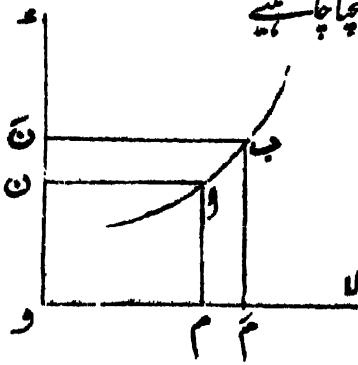
جواب ۳ سیکنڈ

۳۵ کوئی ذرہ یکسان اسراع ع کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور دیکھا گیا کہ کوئی مفروضہ فاصلہ ف طے کرنے مین اوسکی سرعت بمقدار گ بڑھی اور اوس فاصلہ کی ابتدای اور انجام کے سرعتون کا اوسط برابر م کے ہے تو ثابت کرو کہ گ م = ع ف

۳۶ کوئی ذرہ سرعت گ کے ساتھ اوپر کیطرف پھینکا گیا۔ اوپر چڑھنے اور نیچے اترنے مین ہوا کی ٹھکیک ہمیشہ کشش زمین کی مقدار کے نصف کی برابر ہے جب ذرہ اوس مقام پر جہان سے اوپر پھینکا گیا تھا واپس آیا تو اوسکی سرعت کی مقدار گَ رہتی تو ثابت کرو کہ گ = گَ × ۳

باب چہارم

حرکت مرکب اور انفصال حرکت کے بیان مین

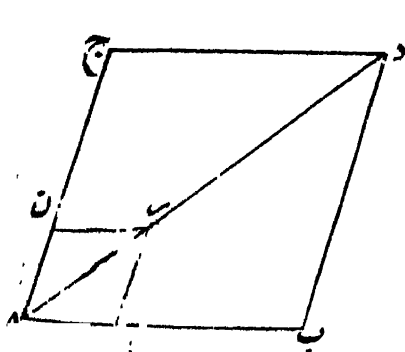
(۳۸) اول ہر سہ باب مین ذرہ کی حرکت صرف خط مستقیم مین تصور کی
گئی ہے - اب ذرہ کی حرکت کسی خط منحنی مین اوسکا مقدار اور راہ کی
اور چند خواص بیان کی جائینگی - جب کوی ذرہ کسی خط منحنی مین حرکت کرتا ہے
تو اوسکی سرعت کے سمت ہر لحظہ بدلتی رہتی ہے مگر کسی خاص نقطہ پر سرعت
کی سمت اوس نقطہ پر کے مماس کے سمت مین ہوتی ہے
مثلاً فرض کرو کہ کسی خاص لحظہ
مین ذرہ نقطہ ا پر ہے اور
نقطہ ب ذرہ کی سمت حرکت مین
نقطہ ا سے بہت سے قریب
واقع ہے - تو ظاہر ہے کہ لحظہ مفروضہ مین ذرہ نقطہ ا سے نقطہ ب کے
طرف چلرہا ہے - مگر چونکہ ا اور ب ایکدوسرے بہت ہی قریب واقع ہین
پس حصہ دایرہ اب اور خط اب مین بہت ہی کم اختلاف ہے یعنی خط
اب نقطہ ا پر کے مماس کے سمت مین ہے چونکہ اوس مماس کے سمت
ہمیشہ بدلتی جاتی ہے تو ہم ذرہ کے سمت سرعت کی تبدیلی ہونیکی سمت کی یعنی
دریافت کر سکینگی

سرعت اور اسراع کے ناپنے اور خط مستقیم سے تعبیر کرنیکا طریقہ ہم بیشتر بیان کر چکے ہین - کسی خط منحنی مین بھی سرعت اور اسراع کے ناپنی اور تعبیر کرنیکا طریقہ وہی ہے صرف اسصورت مین تعبیر کرنیوالا خط اوس مقام کے مماس یا مماس کی متوازی سمت مین کھینچا چاہیے

۳۹ - فرض کرو کہ کوئی ذرہ کسی لحظہ مین کسی خط منحنی مین کسی قسم کے حرکت سے ۱ سے ب کی سمت مین متحرک ہے خط منحنی کی سطح مین کوئی دو محور و لا اور و د ایکدوسری سے کوئی خاص زاویہ بناتے ہوئی فرض کرو اور نقاط ۱ اور ب سے خطوط ۱ م اور ب مَ و ۱ن اور ۱َنَ متوازی محورون مفروضہ کو کھینچو - ریاضی مین وم اور ون کو نقطہ ۱ کے معین و محدد کہتی ہین —

نقطہ م کو پائی معین اور ن کو پائی محدد کہا جاتا ہے —

شکل بالا سے ظاہر ہے کہ جتنی وقت مین ذرہ نقطہ ۱ سے نقطہ ب تک پہونچتا ہی اوسیوقت مین نقطہ م محور و لا کے سمت مین نقطہ مَ تک پہونچتا ہی اور نقطہ ن محور و د کے سمت مین نقطہ نَ تک پہونچتا ہے - اس سے یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہم دونون محورون پر جسبہ انکا نہ م اور ن کے حرکت کو تصور کرین تو خط منحنی مین ذرہ کے حرکت کا پورا پورا قیاس کیا جا سکتا ہے

خط منحنی مین کسی جسم کے حرکت کو مکمل طور پر سمجھنے کے لئے اوس حرکت کو ذرہ کے

محوروں مفروضہ کی سمت مین معین اور محدود کے پاؤن کی حرکتون مین
اسطرح انفصال کرنا بہت مفید ہے اور علم حرکت کا ایک جزو اوسے
ہے - اسطریقہ کا مفصل حال بیان مندرجہ ذیل سے معلوم ہوجائیگا

(۴۰) - اگر کوئی ذرہ کسی لحظہ مین دو مختلف یکسان سرعتون سے دو مختلف
سمتون مین حرکت کرنیکو مائل ہو اور اگر کسی نقطہ سے دو خطوط مستقیم ان
سرعتون کو جداگانہ سمت اور مقدار مین تعبیر کرین اور اگر ان دونو خطوط کو
اضلاع مانکر ایک متوازی الاضلاع بنائی جاوے تو ذرہ کی سرعت واقعی
بھی یکسان ہوگی جسکی سمت اور مقدار متوازی الاضلاع کے اُس قطر سے تعبیر ہونگی جو نقطہ
مفروضہ سے گذرتا ہے دعوے مذکورہ بالا کو متوازی الاضلاع سرعات کہتے ہیں

فرض کرو کہ کوئی ذرہ جو نقطہ
ا پر مقیم ہے سرعت یکسان
گ و گَ کے ساتھ ایک لحظہ
مین جداگانہ ا ب اور ا ج
کی سمتون مین حرکت کرنے کو
مائل ہے

اور فرض کرو کہ خطوط ا ب اور ا ج جداگانہ سرعتون گ اور گَ کو مقدار
اور سمت مین تعبیر کرتے ہین - اضلاع ا ب اور ا ج پر ایک متوازی الاضلاع
ا د بناؤ - سرعت گ کو خط ا ب سے تعبیر کرنے سے یہ مراد ہے کہ
ذرہ نقطہ ا سے یکسان سرعت کے ساتھ چلکر اکائی وقت کے انجام

نقطہ ب پر پہنچتا ہے — یعنی اگر ذرہ کی سرعت صرف گ ہوتی تو
اکائی وقت کے انجام مین وہ خط د ب کی کسی مقام پر پہونچتا کیونکہ د ب متوازی
اج کے ہے — اسیطرح اگر ذرہ کی سرعت یکسان صرف گ ہوتی تو اکائی
وقت کے انجام مین خط ج د مین کسی مقام پر پہونچتا مگر چونکہ سرعتہای گ و گ
ایک ہی لحظہ مین موجود ہین — اسلئے اکائی وقت کے انجام مین ذرہ نقطہ د
پر پہونچیگا کیونکہ نقطہ د خطوط ب د اور ج د کا تقاطع ہے —
فرض کرو کہ اکائی وقت کی کسی حصہ ص کے انجام مین ذرہ نقطہ ۱ پر واقع ہے
خطوط اب اور اج پر نقاط م و ن ایسی فرض کرو کہ

ام / اب = ان / اج = ص / ۱ — اس سے ظاہر ہے کہ

اگر ذرہ سرعت گ سے حرکت کرتا تو ص وقت مین فاصلہ ام طے کرتا
اور اگر صرف گ سرعت سے چلتا تو ص وقت مین فاصلہ ان طے کرتا
اضلاع ام اور ان پر متوازی الاضلاع ۱ ر بناؤ — اب چونکہ ایک ہی لحظہ
مین سرعتین گ اور گ موجود ہین پس ص وقت کے انجام مین ذرہ نقطہ ر پر
پہونچیگا — لیکن چونکہ ام / ان = اب / اج اسلئے قطر ۱ ر اور ۱ د ایک ہی
سیدہ مین ہوگئے (م ۶ شکل ۲) — اس سے یہہ ثابت ہوا کہ ذرہ
اکائی وقت کے ہر لحظہ مین قطر ۱ د کے خط مین حرکت کرتا ہے
اور نیز مثلث ام ر اور ۱ ب د ایکدوسری کی متشابہ ہین اسلئے

۱ ر / ۱ د = ۱ م / ۱ ب = ص / ۱

∴ ۱ ر = ۱ د ص اس سے یہہ ثابت ہوا کہ ذرہ کی سرعت سمت ۱ د

مین یکسان ہے (دیکھو حد ۱۱)

پس یہ ثابت ہوا کہ ذرہ کی واقعی سرعت خط ا د کے سمت مین یکسان ہے
اور مقدار مین متوازی الاضلاع کے قطر ا د سے تعبیر ہوتی ہے

(۱۴) ثبوت مذکورہ بالا سرعت غیر یکسان کے حالت مین بھی کافی ہے
کیونکہ کسی خاص لحظہ مین سرعت غیر یکسان کے مقدار اوس لحظہ سے
ایک اکائی وقت کے عرصہ تک یکسان مان لی جاتی ہے (جیسی حد
۱۲ مین بیان ہوا) پس اگر کسی خاص لحظہ مین ذرہ کی غیر یکسان سرعتین گ
اور گ ہون اور حد ۱۳ کا خطوط ا ب اور ا ج سے تعبیر ہون تو
متوازی الاضلاع ا ب د ج کا قطر ا د ذرہ کی اوس خاص لحظہ مین واقعی
سرعت کو تعبیر کریگا - مگر واضح ہو کہ اوس خاص لحظہ کے بعد ذرہ کی
سرعتون کا مقدار مختلف ہو جائیگا یعنی اوسکی واقعی سرعت کا مقدار
اور سمت ہر لحظہ مین مختلف ہوتا جاتا ہے اور اوسکی تعبیر کرنے کے لئے ہمین
نئی متوازی الاضلاع بنانے پڑتے ہے

(۱۵) اسیطرح اگر خطوط ا ب اور ا ج کسی لحظہ مین ذرہ کی اسراعات
یکسان کو تعبیر کرین تو متوازی الاضلاع ا ب د ج کا قطر ا د
اوس لحظہ مین ذرہ کی واقعی اسراع کو تعبیر کریگا اس دعوی کو متوازی الاضلاع
اسراع کہتے ہین - اسکا ثبوت حد ۱۴ کے طرح ہے
کیونکہ دفعہ ۹ مین ہم دکھلا چکے ہین کہ اسراع بھی سرعت کی طرح ماپا جاتا ہے
یعنی اگر خطوط ا ب اور ا ج کو ذرہ کی سرعت کا تعبیر کنندہ فرض کرین

بلکہ اونکو کسی خاص اکائی وقت مین سرعتون کی زیادتی تعبیر کرتی ہوئی
فرض کیا جاوے تو ثبوت مین کچہہ فرق نہین آویگا - اور ذرہ کا واقعی
اسراع متوازی الاضلاع ع کے قطر ا د سے تعبیر ہوگا

— اسراعات غیر یکسان کے لئے یہی یہی ثبوت کافی ہے
فرق صرف اتنا ہی ہوگا کہ اس حالت مین خطوط ا ب اور ا ج ذرہ کی
فقط اوس لحظہ کے اسراعات کو تعبیر کرینگی کیونکہ غیر یکسان اسراع کے
ماپنے کے قاعدہ سے ہم جانتے ہین کہ اوس خاص لحظہ سے ایک اکائی
وقت تک سرعت کی زیادتی کو یکسان فرض کرنا چاہئے (دیکہو حد ۲۵)
پس قطر ا د اسحالت مین صرف خاص لحظہ مین ذرہ کی واقعی اسراع
کو تعبیر کریگا

(۴۳) - تعریف - سرعات تعبیر شدہ ا ب اور ا ج کے لحاظ سے
ذرہ کی واقعی سرعت تعبیر شدہ ا د کو اون سرعتون کا حاصل کہا جاتا ہے
اور اس حاصل سرعت کے لحاظ سے سرعات تعبیر شدہ ا ب اور
ا ج کو اجزار منفصلہ کہتے ہین - اسیطرح واقعی اسراع اور اسراعات
کے اجزار منفصلہ کے معنی سمجہنی چاہئین

(۴۴) - اگر کسی ذرہ کے سرعات جزوے گ۱ اور گ۲ ہون اور اونکی
سمتین ایکدوسری سے زاویہ ہ بناوین اور سرعت واقعی برابر گ کے ہو
تو دفعہ ۴۳ کی شکل سے ظاہر ہوگا کہ

ا د² = ا ب² + ا ج² + ۲ ا ب × ا ج × جم ہ

$\therefore$ گ^2 = گ$_1^2$ + گ$_2^2$ + ۲ گ$_1$ گ$_2$ جم ۵ .... (۱)

اور $\frac{گ}{جب گ_1 گ_2} = \frac{گ_2}{جب گ_1 گ} = \frac{گ_1}{جب گ_2 گ}$ .... (۲)

(۴۵) - اگر سراعات جزوی ایکدوسری سے زاویہ قایمہ نبادین تو

۵ = ۹۰ $\therefore$ گ^2 = گ$_1^2$ + گ$_2^2$

فرض کرو کہ گ اور گ$_1$ کے درمیان کا زاویہ برابر ہ کے ہے تو

گ$_1$ = گ جم ہ

گ$_2$ = گ جب ہ

اور $\frac{گ_2}{گ_1}$ = مس ہ

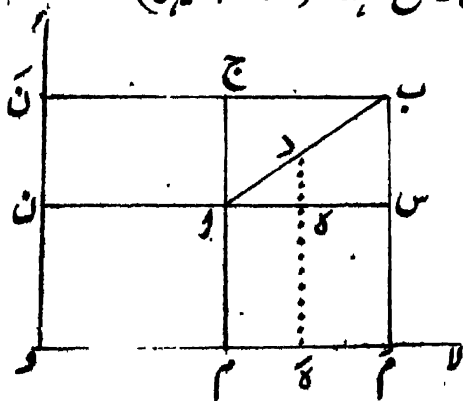
(۴۶) — اگر کسی ذرہ کی اسراعات جزو منفصلہ ع$_1$ و ع$_2$ ہون اور اسراع واقعی ع ہو تو ع و ع$_1$ و ع$_2$ کے نسبتین حد ۵۴ کے متشابہ ہو نگی

یعنی ع$_1^2$ + ع$_2^2$ + ۲ ع$_1$ ع$_2$ جم ۵ = ع^2 وغیرہ وغیرہ

(۴۷) دفعات ۱۴-۱ اور ۴۳ سے معلوم ہوتا ہے کہ جب کوی ذرہ ایک ہی لحظہ مین دو سرعتون یکسانی سے یا دو اسراعات یکسان سے دو مختلف سمتون میں حرکت کرنی پر مایل ہے تو اِن سرعتون یا اسراعات کے شتمل اشے سے ایک حاصل سرعت یا حاصل اسراع پیدا ہوتا ہے چنانچہ جب کوی ذرہ کسی سرعت یا اسراع سے حرکت کرتا ہے تو ہم

اوس سرعت یا اسراع کو اسطرح خیال کرسکتی ہین کہ وہ دو سرعات جزوی یا دو اسراعات جزوی کا حاصل ہے جو کہ دو معین سمتون مین واقع ہین ان دو سرعات جزوی یا اسراعات جزوی کے درمیان کے زاویہ کو جتنا چاہین خیال کرسکتی ہن - لیکن اس زاویہ کو زاویہ قایمہ یعنی ۹۰ درجہ کا زاویہ فرض کرنیسے مطلب کے سمجھنی کے لئے بہت آسانی ہوجاتی ہے -

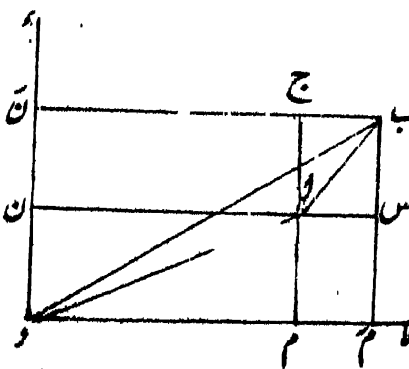
اسلئے سرعت یا اسراع کو دو محور علی القوایم مین منفصل کرتی ہین

واضح ہو کہ جس جگہہ سرعت یا اسراع کے منفصل کا لفظ مستعمل ہوگا (اگر برعکس اوسکی بیان نہ کیا جاوے) تو اوس سے یہہ مراد ہوگی کہ منفصل سرعت یا اسراع ایسے دو محورون مین ہوئے ہی جنکا زاویہ درمیانی قایمہ ہے - پس سرعت گ کے دو اجزای منفصلہ جدا گانہ گ جم a اور گ جیب a ہی جہان a وہ زاویہ ہے جو سرعت گ کے سمت اور پہلی سرعت جزوی کے سمت کے مابین واقع ہے - (حد ۵ ہہ دیکھو)

(۴۸) اگر کسی ذرہ کے سرعت کسی لحظہ مین یکسان ہو تو اوس سرعت کے اجزای منفصلہ دو معین محورو متوازی سمتون مین یکسان ہونگے - فرض کرو کہ خط اب سرعت کے معدار اور سمت کو تعبیر

کرتا ہے - یعنی ذرہ ایک اکائی وقت مین یکسان حرکت سے اب
فاصلہ طے کرتا ہے - ولا اور و د دو محور علی القوایم ہین - شکل سے ظاہر
ہوگا کہ سرعت اب کے اجزای منفصلہ جو کہ محور ہای مذکور کے متوازی ہین -
خطوط اس اور اج سے تعبیر ہوتی ہین - یا م مَ اور ن نَ سے
تعبیر ہوتی ہین جو کہ جداگانہ اس اور اج کے برابر ہین فرض کرو کہ اکائی
وقت کے کسی حصہ یعنی $\frac{۱}{ن}$ کے اخیر مین ذرہ نقطہ د پر واقع ہے اور نقطہ
د سے خط د ہ کہ خط و ب کے متوازی کھینچا گیا ہے
اب مثلث ا د ہ و مثلث ا ب س کو ہمیشہ تناسب ہے - اسلئے

$$\frac{اہ}{اس}=\frac{اد}{اب}=\frac{ص}{۱} \quad ، \quad \frac{مہ}{ممَ}=\frac{ص}{۱} \quad ، \quad مہ = ص$$

اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ذرہ ا کے حرکت اب پر یکسان ہو
تو نقطہ م کے حرکت بھی محور ولا پر یکسان ہو گی - (دیکھو حد ۱۱)
واضح ہو کہ اسراع یکسان پر بھی حد مذکورہ صادق آتی ہے

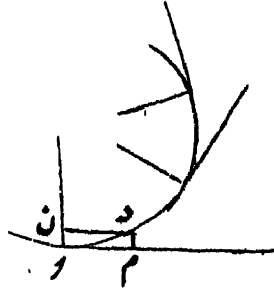
(۴۹) کوئی ذرہ ایک سطح پر کسی طرح کے سرعت سے حرکت کر رہا ہے - تو معلوم کرو کہ اپنی راہ حرکت مین کسی خاص مقام سے دوسری خاص مقام تک جانی مین اوس ذرہ کی سرعت کی مقدار اور سمت مین کیا تبدیلی ہو گی

فرض کرو کہ خط و ا جو کہ نقطہ معین و سے کہنچا گیا ہے ذرہ کی مقام اول پر کے سرعت کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرتا ہے اور اسیطرح خط و ب اوسکی دوسری مقام پر کے سرعت کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرتا ہے - ان سرعات و ا اور و ب کو دو معین محورونین منفصل کرو یعنی و م اور و ن و ا کے جزو ہین - اور و مَ اور و نَ و ب کی جزو ہین اس سے ظاہر ہے کہ ذرہ کی اول مقام سے دوسری مقام پر جانی مین سرعت جزو منفصلہ و م کے تبدیلی خط م مَ سے تعبیر ہوتی ہے - اور اسیطرح سرعت جزو منفصلہ و ن کے تبدیلی خط ن نَ سے تعبیر ہوتی ہے یعنی ا س اور ا ج جو کہ حسب اگانہ م مَ اور ن نَ کے برابر ہین ان تبدیلیون کو تعبیر کرتی ہین اسلئی متوازی الاضلاع س ج کا وتر ا ب سرعت کے واقعی تبدیلی کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرتا ہے اسلئی اگر ہمکو معلوم کرنا ہو کہ ایک مقام سے دوسری مقام پر جانی مین ذرہ کی سرعت مین کیا تبدیلی ہوتی تو اوسکی سلئے قاعدہ یہہ ہے کہ سطح پر کسی نقطے سے دو خط کہنچی جاوین جنمین سے ایک ذرہ کے اوّل مقام کے سرعت کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرے اور دوسرا خط ذرہ کے دوسری مقام کے سرعت کو - اور ان دونو خطو نکی اخیر کے سرونکو ملانی سے جو خط پیدا ہوگا وہ ذرہ کے سرعت کے واقعی تبدیلی کو مقدار اور سمت مین تعبیر کریگا

واضح ہو کہ اگر ذرہ خط مستقیم مین حرکت کرے تو اوسکی ایک مقام سے

دوسری مقام پر جانے سے سمت مین کسیطرح کے تبدیلی نہین ہوتی۔
پس ایسی حالت مین نقطہ ا اور ب (شکل مذکور مین) ایک ہی خط مستقیم مین
ہونگی اور بعض صورتون مین یہہ بہی ممکن ہے کہ سرعات تغیر شدہ یہ
و ا اور و ب کے مقدار اور سمت ایسی ہو کہ سرعت و ا کے و لا محور
پر جزو منفصلہ کے تبدیلی منفی ہو یعنی برعکس سمت مین ہو یا یہہ کہو
کہ و م و مَ سے بڑا ہو لیکن مختلف حالتون مین علیحدہ شکلین بناکر دیکہنی
سے معلوم ہوگا کہ تبدیلی کے مقدار اور سمت معلوم کرنیکو لئے جو
قاعدہ ہمنی اوپر بیان کیا ہے وہ ہر ایک حالت پر درست آویگا
(۵۰) ہمنی حد ۱۹ اور ۲۰ مین جو معنی اسراع کی بیان کئی ہین وہ
فقط اوسی حالت مین درست ہین جبکہ ذرہ خط مستقیم مین حرکت کرے
مگر جبکہ ذرہ کے حرکت خط منحنی مین ہوگی تو وہان اسراع کے معنی
اور طرحپر لئے جاتی ہین
دفعہ ۴۹ مین بیان کیا گیا ہے کہ ذرہ کی ایک مقام سے دوسری مقام
پر جانی مین سرعت کے تبدیلی کے مقدار اور سمت کسطرحپر دریافت ہوتی
ہے۔ طالب العلم کو معلوم ہوگا کہ اس تبدیلی کے پیدا ہونے کے
دو باعث ہوسکتی ہین۔ یعنی (اول) ذرہ کی سرعت کے مقدار کی تبدیلی
اور (دوم) اوسکی سمت کے تبدیلی جس حالتین کہ ذرہ کی حرکت خط
مستقیم مین ہو تو وہان سرعت کے سمت ہمیشہ یکسان رہتی ہے اسلئے فقط
مقدار ہی کے تبدیلی کو کل تبدیلی سمجہنے چاہیئے۔ اور اسیطرح جبکہ ذرہ یکسان سمت

سے کسی خط منحنی مین حرکت کرے تو وہان سرعت کی مقدار کی تبدیلی کچھہ ہوگی
اور فقط سمت ہی کے تبدیلی سے کل تبدیلی پیدا ہوتی ہے - لیکن جبکہ
ذرہ غیر یکسان سرعت سے خط منحنی مین حرکت کرے تو وہان مقدار اور سمت
دونوں کی تبدیلی کل تبدیلی کے باعث ہین لھذا اسراع کے تعریف عام طور پر
اسطرح ہے - ذرہ کی سرعت کے اکائی وقت مین کل تبدیلی کو (خواہ ایک
باعث سے ہو یا دونوں سے جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا) - اسراع کھا جاتا ہے
واضح ہو کہ جو تعریف اسراع کی بیان کی گئی ہے اوس تعریف سے جو کہ
حد ۲۹ مین بیان ہوئی ہے بر خلاف نہین ہے - سرعت کی مقدار اور
سمت کے تبدیلیون سے جو کل تبدیلی حاصل ہوتی ہے اوسکو اسراع کہتی ہین
اسلئے جہانکہ سرعت کے سمت مین کچھہ تبدیلی نہین ہے وہان اکائی وقت مین
سرعت کی مقدار ہی کے تبدیلی کو اسراع کہنا درست ہے

(۵۱) - بیان مذکورہ بالا سے ظاہر ہے کہ ذرہ کی راہ حرکت مین کسی مقام پر
اوسکا واقعی اسراع دو اسراعات جزوی کا حاصل ہے یعنی اول وہ اسراع
ہے جو کہ اوس مقام پر سرعت کی مقدار کے زیادتی ہے اور جسکی سمت
اوس مماس مین ہے جو راہ حرکت مین اوس مقام سے کھینچا گیا ہے
اور دوم وہ اسراع ہے جو کہ سرعت کے تبدیلی سمت سے پیدا ہوتا ہے
اور جسکی سمت مماس مذکورہ بالا کے عمود مین ہے - جبکہ ذرہ یکسان
سرعت سے خط منحنی مین حرکت کرے تو وہان سرعت کی مقدار مین کچھہ
تبدیلی نہوتی اور فقط سمت مین تبدیلی ہونے سے اسراع خط مماس کے عمود

سمت مین ہوتا ہے
شکل مندرجہ ذیل سے اوسکا اچہیطرح معلوم ہو جاویگا کہ ذرہ کے حرکت خط منحنی مین ان دو قسمون کے اسراعون کے ساتھ کسطرح پر ہوتی ہے

اس شکل مین ہر لحظہ مین ذرہ کے دو سرعت موجود ہین - اگر اوسکی سرعت فقط خط مماس مین ہوتی تو وہ خط مستقیم پر حرکت کرتا رہتا - لیکن جب وہ خط مماس مین حرکت کرنے کو مایل ہوتا ہے تو اوسوقت مین ایک اور دوسری سرعت کے ساتھ خط عمود مماس پر بہی حرکت کرنے کو مایل ہوتا ہے - اور نتیجہ ان دونون میلان کا یہہ ہوتا ہے کہ متوازی الاضلاع سرعت کے قاعدہ سے ذرہ اون دو نو سمتون کے بیچ مین کسی خاص سمت حرکت کرتا ہے اور ہر لحظہ ایسی صورت ہونے کے سبب سے اوسکا راہ حرکت ایک خط منحنی مین ہو جاتا ہے

سوالات باب چہارم

(۱) کوئی ملاح دریا کے ایک کنارہ پر کے کسی خاص مقام سے دوسری کنارہ پر اوس مقام کے عین مقابل مین جانا چاہتا ہے - اور دریا کے بہاو کے

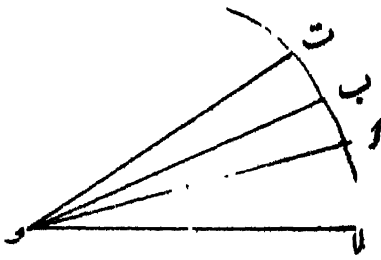
دو چند سرعت سے اوسنی کشتی چلائے تو بتلاؤ کہ ناؤ کو کس سمت مین چلاوے جو اوس مقام پر جہانکہ جانا چاہتا ہے پہونچ جاوے

(جواب) ندی کے بہاو کے سمت سے ۱۲۰ درجہ کا زاویہ بناکر

(۲) کوئی شخص چاہتا ہے کہ دریا سے سیدہا تیر کر اوترے اور چوڑائی دریا کے ا تہی جبکہ وہ دوسری کنارہ پر پہونچا تو اوسنے معلوم کیا کہ جس جگہہ وہ اترنا چاہتا تہا اوس سے ب فاصلہ پر دریا کے نیچی آن پڑا ہی۔ تو ثابت کرو کہ اگر وہ اوسی خط مین جسمین گیا تہا آنا چاہیے تو اوسکو چاہی کہ دریا سے ایک ه زاویہ بنا کر چلی تاکہ مس $(45 - \frac{ه}{2}) = \frac{ب}{ا}$

(۳) دو ذرے اپنے علیحدہ علیحدہ سرعت یکسان سے ایک ہی سطح پر دو خطوط مستقیم مین چلرہے ہین اگر دونون ذرون کو ایک خط مستقیم سے ملایا جاوے اور اوس خط مین ایک ایسا نقطہ لیا جاوے جو اوسکو متناسب حصون معین مین تقسیم کرے تو وہ نقطہ بہی ایک خط مستقیم مین حرکت کریگا

سرعت الزاویہ اور اسراع الزاویہ کے بیان

(۵۲) فرض کرو کہ کوئی ذرہ ا کسی خط مستقیم یا خط منحنی ا ب ت مین حرکت کر رہا ہے۔ کسی نقطہ و سے ولا ایک خط کہنچا گیا ہے

جب کہ ذرہ ا ب ت پر حرکت کر رہا ہے تو نقطہ و سے اوسکی سمت متواتر وقتون مین وا۔ وب۔ وت وغیرہ ہے

اس سے ظاہر ہے کہ زاویہ لا وا ہر لحظہ بدلتا جاویگا۔ کسی خاص اکائی وقت مین اس زاویہ کی مقدار تبدیلی کو بلحاظ نقطہ و کے ذرہ کے سرعت زاویہ کہینگے۔ واضح ہو کہ اس قسم کے سرعت کے ماپنے کے لئے ذرہ کا فاصلہ نقطہ و سے معلوم کرنا ضرور نہین اگر دو ذرون کے فاصلے نقطہ و سے مختلف ہون تو بہی اونکے سرعت زاویہ کو برابر کہا جائیگا بشرطیکہ بلحاظ نقطہ و کے اونکے سمت کے تبدیلی کے مقدار برابر ہو

(۵۳) سرعت الزاویہ یکسان یا غیر یکسان ہو سکتی ہے

جبکہ برابر وقت مین یا اوس وقت سے کے برابر حصون مین زاویہ لا و ا کی مقدار تبدیلی برابر ہو تو سرعت الزّاویہ یکسان ہو گی اور اگر اسکی برعکس ہو تو غیر یکسان

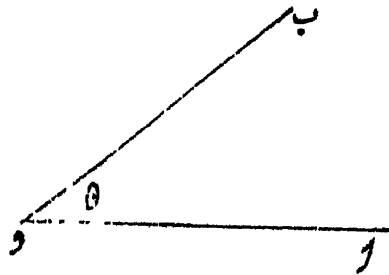
غیر یکسان سرعت الزّاویہ بہی دو قسم کہوتی ہے جبکہ سرعت الزاویہ کی تبدیلی برابر وقت مین برابر ہو تو اوس تبدیلی کو یکسان اسراع الزاویہ کہینگی اور جب ایسا نہو تو غیر یکسان اسراع الزّاویہ

(۴۵) سرعت الزّاویہ یا اسراع الزاویہ کے ماپنے کا طریقہ بعینہ ویسا ہے ہی جیساکہ سرعت یا اسراع کے لئے طریقہ پہلے بیان کرچکے ہین - یعنی جبکہ سرعت الزّاویہ یکسان ہو تو اکائی وقت مین زاویہ لا و ا کی تبدیلی مین اکائی زاویہ سے جسقدر تعداد ہو گی وہی تعداد سرعت الزّاویہ کو تعبیر کریگی مثلاً ہم کہتے ہین کہ کسی ذرہ کی سرعت الزاویہ فی منٹ ۱۰ درجہ ہے تو ہمارے مراد یہہ ہوگی کہ ایک منٹ مین ایک درجہ تبدیلی کو ہم نے سرعت الزّاویہ کے اکائی فرض کیا تو اس حساب سے زاویہ لا و ا کے تبدیلی سرعت الزاویہ کے اکائی کا دس گنا ہے جبکہ سرعت الزّاویہ یکسان نہو تو کسی لحظہ معین مین اوسکی ماپنے کے لئے اوس لحظہ سے لیکر اکائی وقت تک سرعت الزّاویہ کو یکسان فرض کرنا چاہیے - یہہ طریقہ ویسا ہی ہے جیساکہ ہم سرعت غیر یکسان کے ماپنے کے لئے بیان کرچکے ہین

اسطرح سے اسراع الزاویہ جبکہ یکسان ہو تو اکائی وقت مین سرعت الزّاویہ کے تبدیلی کے مقدار جسقدر ہوتی ہے اوس سے اسراع

گیا - اب چونکہ ذرہ کی سرعت دایرہ پر یکسان ہے - اسلئے اب = گ
ہ - لیکن اوسی وقت مین ذرہ ۱ سے ب تک جاتا ہے اور زاویہ ا و ب بناتا ہے
ا و ب = ط . گ ط = اب / و ا = گ / ر . · . گ = ط ر

(۵۷) ذرہ کا محیط دایرہ پر کسی خاص مقام سے چلکر اور تمام اوس دایرہ کے
چکر لگانے کے بعد اوسی مقام پر لوٹ آنے مین جو وقت صرف ہوتا ہے
اوسکو دایرہ کا وقت گردش کہتے ہین اوس وقت مین خط و ا کے سمت
۲ π یعنی ۳۶۰ درجہ گھوم آتی ہے اگر ک اوسکی وقت گردش کو تعبیر کرے
تو ک = ۲ π ر / گ = ۲ π / ط
اور ط = ۲ π / ک

(۵۸) کوی ذرہ دایرہ مین سرعت یکسان گ سے چلتا ہے - کسی خاص
لحظہ مین اوسکی اسراع کے سمت اور مقدار معلوم کرو

فرض کرو کہ نقطہ و دایرہ کا مرکز ہے اور ولا اور و ء دو محور علی القوایم ہین۔

چونکہ دایرہ پر ذرہ کی سرعت یکسان ہے اسلئے بلحاظ نقطہ و کے اوسکی سرعت الزاویہ بھی یکسان ہے اور فرض کرو کہ وہ ط سے تعبیر ہوتی ہے اور فرض کرو کہ ذرہ ولا سے جسکو ص وقت کے اخیر مین نقطہ ا پر پہونچا۔ اور اوسکی بعد ص وقت کے اخیر مین جو مقدار مین بہت کم ہی نقطہ ب پر پہونچا۔ تو ظاہر ہے کہ جب ذرہ نقطہ ا و ب پر ہے تو اوسکی حرکت کی سمت جداگانہ اون خطوط مماس مین ہے جو کہ اون نقطون سے دایرہ پر کھینچی گئی ہین

فرض کرو کہ زاویہ ا ولا = θ اور زاویہ ا ب = θ̄

تو θ = ط ص ۔ اور θ̄ = ط ص̄ .... (حد ۸۴)

نقاط ا و ب پر سرعت گ کو محورون کے متوازی منفصل کرو تو محور ولا کے متوازی اجزا منفصلہ جداگانہ = ـ گ جب θ اور ـ گ جب (θ + θ̄)

اور محور و ء کے متوازی اجزا منفصلہ جداگانہ گ جم θ اور گ جم (θ + θ̄)

محور ولا کے متوازی اجزا اسلئے منفی ہین کہ اونکی سمت لا سے و کے طرف ہے۔

اسلئے ظاہر ہے کہ ولا محور کے متوازی سرعت کے تبدیل ص̄ وقت مین

= - گ جب (θ + θَ) + گ جب θ = - گ (جب θ جم θَ
+ جم θ جب θَ - جب θ) = - گ θَ جم θ = - گ ط صَ جم θ
(کیونکہ θَ نہایت قلیل ہے اسلئے جب θَ = θ اور جم θَ = ۱)

اس مساوات سے عیاں ہے کہ و لاَ محور کے متوازی اسراع یعنی اکائی وقت میں سرعت کی تبدیلی = - گ ط جم θ .... (بموجب حد ۲۰)

اسی طرح صَ وقت میں . و ذَ محور کے متوازی سرعت کی تبدیلی =
گ (جم θ × جم θَ - جب θ × جب θَ - جم θ) = - گ θَ جب θ
= - گ ط صَ جب θ

∴ اسی محور کے متوازی اسراع = - گ ط جب θ

∴ ذرہ کے اسراع واقعی = √((- گ ط جم θ)² + (- گ ط جب θ)²)
= گ ط

لیکن گ = ط ر .... (حد ۵۵)

∴ اسراع واقعی = ر ط² = گ² / ر

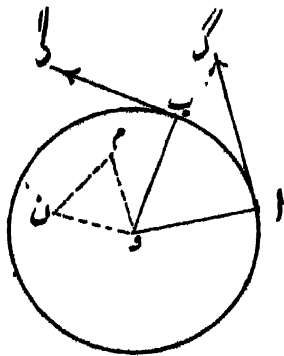
اور اگر دائرہ کے محیط پر ذرہ کا وقت گردش = ک ہو

تو اسراع واقعی = ۴ ر گ² / ک²

فرض کرو کہ اسراع واقعی کے سمت و لاَ محور کے ساتھ زاویہ φ بناوے تو مساوات مذکورہ سے ظاہر ہے کہ مس φ = (- گ ط جب θ) / (- گ ط جم θ) = مس θ ...... (بموجب حد ۴۰)

∴ φ = θ یا ۱۸۰° + θ

پس اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ذرہ کے اسراع کی سمت ہر لحظہ مین دائرہ کے مرکز کی طرف ہے - اور یہ بات ہم پہلے سے بھی معلوم کرسکتے تھے کیونکہ ذرہ کے سرعت دائرہ پر یکسان ہے اسلیئے اسکے اسراع کی سمت ہر لحظہ مین عمود مماس کی سمت مین ہوگی جوکہ اس خاص صورت مین (یعنے دائرہ کے) مرکز کی طرف ہوتی ہے .... (دیکھو حد ۱۵)

یہ دعوی جو حد ۸۵ مین بیان کیا گیا ہے صورت ذیل سے بھی ثابت ہوسکتا ہے - دائرہ کے مرکز و سے دو خط وم و ن ایسے کھینچو جو ذرہ کے آ اور ب مقام پر کی سرعتونکو سمت اور مقدار مین جداگانہ تعبیر کرین ۔ چونکہ دائرہ پر ذرہ کی سرعت یکسان ہے اسلیئے

وم = ون اور بموجب حد ۹۴ کے یہ معلوم ہے کہ خط م ن ذرہ کے مقام آ سے مقام ب پر جانے مین سرعت کی تبدیلی کو تعبیر کرتا ہے اور اگر ذرہ کو اس فاصلہ چلنے مین ص وقت صرف ہوا ہو تو

ا ب = گ ص اور ε = زاویہ ا و ب = $\frac{\text{اب}}{\text{ر}} = \frac{\text{گ ص}}{\text{ر}}$

مگر چونکہ زاویہ ا و ب = م و ن ∴ م ن = ۲ وم × جب $\frac{\text{م و ن}}{۲}$ = ۲ گ $\frac{ε}{۲}$ = گ ε = $\frac{\text{گ}^{۲}\text{ ص}}{\text{ر}}$

∴ ذرہ کا اسراع یعنے اکائی وقت مین سرعت کی تبدیلی = $\frac{گ^2}{ر}$
ظاہر ہے کہ اگر $\overline{ص}$ نہایت قلیل ہو یعنے مقام $\overline{آ}$ و $\overline{ب}$ بہت نزدیک ہون
تو خط $\overline{وم}$ اور $\overline{ون}$ کے درمیان کا زاویہ نہایت قلیل ہوگا اور خط $\overline{ن م}$
$\overline{وم}$ پر عمود ہوگا - لیکن $\overline{وآ}$ بھی $\overline{وم}$ پر عمود ہے اسلئے ثابت ہوا
کہ مقام $\overline{آ}$ پر ذرہ کے اسراع کی سمت $\overline{ا و}$ ہے یعنے مرکز کی طرف ہے

اگر رسّی کے ایک سرے کو قائم کر کر اور دوسرے سرے مین ایک
گیند باندہ کر دائرہ پر یکسان سرعت سے چکر دیا جاوے یا کہ کسی کو لہو
کا بیل اُسکے گرد یکسان سرعت سے حرکت کرے تو یہ حرکتین اُسی حرکت
کی مثالین ہین جسکا ہم نے اوپر ذکر کیا ہے - ان صورتون مین یہ ظاہر
ہے کہ بیل ہر ایک لحظہ مین ایک خط مستقیم مین چلنے کی کوشش کرتا
ہے مگر ہر لحظہ مین اُس لکڑی یا رسّی جسکے ذریعہ سے وہ کولہو سے بدہا
ہوا ہے اُسکو کولہو کی طرف کھینچتی ہے اور اُسکا نتیجہ یہ ہوتا ہے
کہ بیل دائرہ مین حرکت کرتا ہے یہان بیل کا اسراع کی سمت دائرہ
کے مرکز کی طرف ہے - اگر ایسا نہ ہوتا تو بیل سیدھا خط مستقیم
مین حرکت کرتا -

(۵۹) فرض کرو کہ حد ۵۸ کی شکل مین نقطہ ا سے $\overline{آم}$
$\overline{وآ}$ پر عمود کھینچا گیا ہے تو اُس حد مین ثابت کیا گیا ہے کہ نقطہ $\overline{م}$
کا اسراع محور $\overline{وآ}$ پر = - گ جتا ہ = - $\frac{گ^2}{ر^2}$ × وم یعنے نقطہ
$\overline{م}$ کا اسراع دائرہ کے مرکز کی طرف ہے

اور اِس مرکز سے م کا جسقدر فاصلہ ہے اُسکے متناسب ہے ۔ اور یہ
بھی ظاہر ہے کہ جس عرصہ مین ذرہ آ نقطہ لا سے شروع ہوکر دائرہ
کا ایک پورا چکر لگاتا ہے اُسی عرصہ مین نقطہ م بھی نقطہ لا سے
شروع ہوکر اور تمام قطر لا لاَ پر حرکت کر کر پھر اُلٹا اسی خط مین نقطہ
لا پر لوٹ آتا ہے ۔ اس سے ثابت ہوا کہ جب کسی ذرہ کے اِسراع
کے سمت ہر لحظہ مین کسی خاص نقطہ کی طرف ہو اور اُسکی مقدار اُس
فاصلہ کے متناسب ہو جو ذرہ کا اس نقطہ سے ہے تو ذرہ اُس نقطہ خاص کی
دونو جانب ایک خط مین اس طرح سے حرکت کرتا رہیگا کہ نقطہ خاص کی ہر دو
طرف ذرہ کے فاصلات طویلہ برابر ہونگے ۔ اس طرح نقطہ کی ایک
جانب کی حد سے دوسری جانب کی حد تک جانے کو جنبش
کہتے ہین اور اُسمین جو وقت صرف ہوتا ہے اسکو وقت جنبش
بولتے ہین پس یہان نقطہ م کا وقت جنبش برابر ہے اُس وقت
کے جو دائرہ پر ذرہ آ کے ۱۸۰ درجہ گھومنے مین صرف ہوتا ہے یعنے

$= \frac{\pi}{ک}$ .... (بموجب حد ۵۰)

باب ششم

سرعت منتسب

(۶۰) بیان ہو چکا ہے کہ ذرہ کی تبدیلی مقام کے مقدار کو اُسکی
سرعت کہتے ہین ۔ مگر ذرہ کے مقام کی تبدیلی کا قیاس نہین ہو سکتا

جب تک کہ وہ تبدیلی کسی اور مقام کے ساتھ ملحوظ نہ ہو مثلاً - فرض کرو کہ دو شخص کسی ریل پر سوار ہین - جب ریل چلتی ہے تو اُن دونون کے حرکت ایک ہی ہے اگر وے صرف ایک دوسرے کی حرکت پر خیال کرین تو اُنمین سے ہر ایک کو معلوم ہوگا کہ دوسرا شخص ساکن ہے کیونکہ اُنکی باہمی تبدیلی مقام کچھ نہین ہے لیکن بلحاظ کسی اور شئے کے جو کہ ریل سے باہر ہے وہ دونو متحرک معلوم ہو گئے - اب خیال کرو کہ چلتی ہوئی ٹرین مین ایک شخص بیٹھا ہوا ہو اور دوسرا گاڑی کے ایک کنارہ سے دوسرے کنارہ کی طرف حرکت کرے تو بلحاظ پہلے شخص کے یہ چلنے والا شخص حرکت کرتا ہوا معلوم ہوگا -

کسی ایک متحرک ذرہ کے لحاظ سے دوسری ذرہ کی حرکت کو حرکت منتسب کہتے ہین *

(۶۱) واضح ہو کہ دنیا مین جہان کہین حرکت نظر مین آتی ہے وہ حرکت منتسب ہی حرکت مطلق کہین دیکھنے مین نہین آتی - فرض کرو کہ ہم چلتے ہوئی ٹرین مین یعنے گاڑی کے ایک کنارہ سے دوسرے کنارہ کی طرف چلین - تو ہماری حرکت بلحاظ اُس کنارہ کے ہوئی جہان سے ہم نے چلنا شروع کیا - مگر چونکہ ریل ساکن نہین اسکے باہر کے کسی درخت وغیرہ کے لحاظ سے وہ ریل متحرک ہی پھر وہ درخت وغیرہ بھی زمین کے ساتھ اُسکی روزانہ اور سالانہ حرکت مین شامل ہے جو حرکتین بلحاظ آفتاب کے ہین - اور یہ بھی تحقیق نہین کہ خود آفتاب

* اس حرکت منتسب کو حرکت اضافی و حرکت متعلق بھی کہتے ہین ۱۲

ساکن ہے یا متحرک - پس جب ہم کہتے ہین کہ کوئی ذرہ حرکت کرتا ہے تو ہماری مراد ہوتی ہے کہ اسکی حرکت بلحاظ کسی دوسرے مقام کے ہے جسکو کہ ہم اسوقت ساکن فرض کر لیتے ہین یعنے اس ذرہ سے جسکو ہم ساکن فرض کرتی ہے دوسرے ذرہ کے فاصلہ اور سمت کے تبدیلون سے اسکی حرکت کا قیاس کرتے ہین

(۶۲) حرکت منتسب کے مقدار کو سرعت منتسب کہتے ہین - سرعت منتسب کے مختصر تعریف یہ ہو کہ ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کے سرعت منتسب گ وہ سرعت ہی کہ اگر ذرہ آ ساکن رہتا اور ذرہ ب سرعت گ سے چلتا تو ہر لحظہ مین اون دونو نکا فاصلہ اور انکے درمیان کے خط کی سمت ویسے ہی رہتی جیسکہ انکی اپنی اپنی علحدہ سرعتون کے ساتھ چلنے سے ہوتی -

(۶۳) تعریف مذکورہ بالا سے معلوم ہوگا کہ اگر دو متحرک ذرونمین کوئی مشترک سرعت موجود ہو تو وہ سرعت مشترک انکی سرعت منتسب پر کچھ اثر نکریگی مثلاً جیسے کہ مثال مذکورہ بالا مین ریل کی حرکت دونو آدمیون مین مشترک ہے اسلئے ریل کا متحرک یا ساکن ہونا انکی سرعت منتسب پر کچھ اثر نہین کرتا ہے - اسیطرح زمین کی حرکت ان تمام اشیاء کے لئے جو اسکی سطح پر ہین حرکت مشترک ہو اسلئے ان اشیاء کی ایک دوسرے کے ساتھ جو سرعت یا حرکت منتسب ہو وہ ویسی ہی رہتی ہے جیسے کہ اگر زمین ساکن رہتے

(۱) ایک ذرہ کے حرکت منتسب بلحاظ دوسرے ذرہ کے اسطرح معلوم کی جاتی ہے۔

فرض کرو

کہ ا اور ب دو ذرے بلحاظ
کسی تیسری ساکن ذرہ کے جداگانہ
ک اور گ سرعت یکسان سے
حرکت کر رہے ہین
اور خطوط اک اور ب لا ان
سرعتونکو مقدار اور سمت مین تعبیر
کرتے ہین۔ یعنے ایک اکائی
وقت مین جب ذرہ ا نقطہ
اسے چلکر نقطہ ک پر پہنچتا ہے
اُسی وقت مین ذرہ ب نقطہ ب سے چلکر لا پر پہونچتا ہے۔ ابتدا
مین دونونکا فاصلہ اب ہے اور اوس وقت کے انجام مین ک لا ہے۔
اب اگر ذرہ ا کی حرکت کی سمت کے مخالف دونون ذرون
پر ایک مشترک سرعت گ زیادہ کرین تو ظاہر ہے کہ اُنکی سرعت
منتسب وہی رہیگی جیسی کہ پہلے تھی۔ اس سرعت کے زیادہ کرنے
سے ذرہ ا تو ساکن ہوگیا اور ذرہ ب کی سرعت مقدار او سمت مین
متوازی الاضلاع لا ج کے وتر سے تعبیر ہوگی اسلئے اکائی وقت
کے انجام مین ذرونکا فاصلہ ا د ہوگا ؛

لیکن دلا = ب ج = اک کے اور یہ تینون خط متوازی سے
بھی ہین اسلئے ا د = ک لا اور وہی متوازی بھی ہین (شکل ۳۴ مقالہ ا)
فرض کرو کہ اکائی وقت کا کوئی حصہ ص ہے اور خطوط اک
ب لا اور ب د پر جداگانہ م ن ع ایسے نقطے لئے گئے کہ ام/اک
= ب ن/ب لا = ب ع/ب د = ص/ا پس اگر دونو ذرے اپنی اپنی
سرعتون کے ساتھ چلتے تو ص وقت کے انجام مین ذرہ ا نقطہ
م پہ اور ذرہ ب نقطہ ن پر جا پہونچتے اور اونکا فاصلہ م ن ہوتا
اور اگر ا ساکن رہتا اور ذرہ ب خط ب د پر حاصل سرعت سے
ساتھ حرکت کرتا تو ص وقت کے انجام مین ذرہ ب نقطہ ع پہ
پہونچتا اور ا سے اسکا فاصلہ اع ہوتا - مگر ب ن/ب لا = ب ع/ب د
∴ ع ن متوازی ہے دلا کو اور اسی لئے اک کو بھی
پھر ع ن/لا د = ب ن/ب لا (متناسب مثلثون کے اصول سے) اور
ب ن/ب لا = ام/اک ∴ ن ع = ام اور چونکہ یہ دونو آپسمین متوازی
ہین اسلئے اع = م ن یعنے اس سے ثابت ہوا کہ اگر ذرہ ا ساکن
ہو اور ذرہ ب خط ب د کی سمت مین ایسی سرعت کے ساتھ جو
ب د سے تعبیر ہوتی ہو حرکت کرے تو ہر لحظہ مین اسکا فاصلہ اور
سمت حرکت ذرہ ا سے وہی رہیگی جو اسحالت مین رہتی اگر دونو
اپنی اپنی سرعت سے حرکت کرتی - پس ایک ذرہ کی سرعت منتسب بلحاظ
دوسری ذرہ کے معلوم کرنیکا قاعدہ یہ ہے کہ دونو ذرون پر ایک

ایسی سرعت مشترک لگا دین جو مقدار مین اوس ذرہ کی سرعت کے برابر ہے کہ جسکے لحاظ سے سرعت منتسب معلوم کرنی ہے مگر سمت مین اُسکی سرعت کے مخالف ہو اس سے وہ ذرہ ساکن ہوجاویگا اور دوسری ذرہ کی اپنی سرعت اور سرعت زیادہ شدہ کا حاصل سرعت جو ہوگی وہی بلحاظ پہلے ذرہ کے دوسری ذرہ کی سرعت منتسب کہلاوےگی *

(۶۴) آ اور ب دو ذرہ ج د خط پر

جدا گانہ سرعت یکسان گ اور گ َ سے ایک ہی سمت مین حرکت کر رہے ہین ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کی سرعت منتسب معلوم کرنی ہے - فرض کرو کہ دونو ذرون پر سمت دج مین سرعت گ لگا ئی جاوے تو اُس سے اُنکی سرعت منتسب مین کچھ فرق نہ آویگا - مگر اس سرعت کے لگانے سے ذرہ آ ساکن ہوگا اور ذرہ ب سمت ج د مین سرعت گ َ - گ کے ساتھہ حرکت کرتا رہیگا یعنے اگر ذرہ آ کی نسبت ذرہ ب کی سرعت منتسب م ہو تو م = گ َ - گ

واضح ہو کہ اگر گ سرعت گ َ سے مقدار مین زیادہ ہو تو م منفی ہوگا یعنے اس سرعت منتسب کے سمت د سے ج کی طرف ہوگی - پس تو یہ معنی ہوئے کہ ذرہ ب رفتہ رفتہ ذرہ آ کے نزدیک ہوتا جاویگا اسلیے آ کی لحاظ سے ذرہ ب کی حرکت د سے ج کی طرف مفہوم ہوگی اور اگر گ = گ َ تو م = ۰

یعنے اسحالت مین ذرونکے بیچ کا فاصلہ ہر لحظہ مین برابر رہیگا اور ایک ذرہ کے لحاظ سے دوسرے ذرہ کے مقام کی تبدیلی کچھ نہین ہوگی ۔

(۶۵) جب دو ذرے مخالف سمتون مین حرکت کرین تو بیان مذکورہ بالا سے معلوم ہوگا کہ ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کی سرعت منتسب سرعت گ کی سمت مین مقدار مین برابر گ + گ کے ہوگی

(۶۶) واضح ہو کہ جیسا کہ اوپر ہم نے ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کی سرعت منتسب معلوم کرنے کا قاعدہ بیان کیا اسیطرح سے ذرہ ب کی لحاظ سے ذرہ آ کی سرعت منتسب معلوم ہو سکتی ہے غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ یہ دونو سرعات منتسب مقدار مین برابر ہونگی ۔ مگر سمت بابت مخالف ۔ یعنے اگر آ کے لحاظ سے ب کی سرعت منتسب م ہو تو ب کے لحاظ سے آ کی سرعت منتسب — م ہوگی ۔

(۶۷) آ اور ب دو ذرے گ اور گ جداگانہ سرعات یکسان سے مختلف سمتون مین حرکت کر رہے ہین تو ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کی سرعت منتسب معلوم کرو ۔

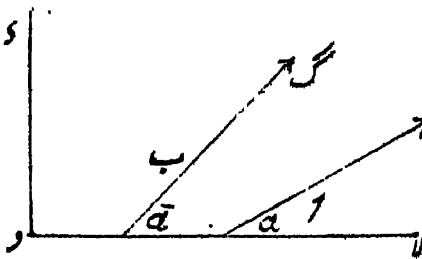
شکل عدد ۲۳ سے اور اس حد کے بیان سے معلوم ہوگا کہ متوازی الاضلاع لاج کا وتر ب د ذرہ آ کے لحاظ سے

ذرہ ب کی سرعت منتسب کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرتا ہے اسلئے اگر سرعات گ اور گَ کی سمتونکی درمیان کا زاویہ = θ تو $\because$ یہ

لا ب ج = $180^\circ - \theta$

$\therefore$ (ب د)^2 = (ب لا)^2 + (ب ج)^2 + ٢ ب لا × ب ج × جم ($180^\circ - \theta$)

$\therefore$ م^2 = گ^2 + گَ^{2} − ٢ گ گَ جم θ

(٦٨) دفعہ مذکورہ بالا مین کسی خاص محور و نمین ذرہ کے سرعتون کو منفصل کرکے بھی ہم سرعت منتسب کو معلوم کرسکتی ہین مثلاً فرض کرو کہ سطح حرکت مین ولا اور وی دو محور علی القوائم ہین اور سرعت گ اور گَ خط ولا کے ساتھہ جداگانہ α اور $\bar{\alpha}$ زاویہ بناتے ہین - اگر ان سرعتونکو محور و نمین منفصل کرو تو ولا محور مین اُنکے اجزاء منفصلہ جداگانہ = گ جم α اور گَ جم $\bar{\alpha}$ کے برابر ہونگے اور محور وی مین جداگانہ = گ جب α اور گَ جب $\bar{\alpha}$ ہکے - اسلئے اگر محور ونکی سمت مین بلحاظ ذرہ آ کے ذرہ ب کی سرعت منتسب کے اجزاء منفصلہ جداگانہ م$_1$ اور م$_2$ ہون تو

م۱ = گ جم α - گ جم β

اور م۲ = گ جب α - گ جب β ....(حد ۴۶)

∴ م۲ = م۱۲ + م۲۲ = گ۲ + گ۲ - ۲ گ گ × جم (α - β)

مگر شکل سے ظاہر ہے کہ α - β = برابر اس زاویہ کے ہے جو گ اور گ کی سمت کے درمیان ہے اسلئے اگر یہ زاویہ = θ ہو

تو م۲ = گ۲ + گ۲ + ۲ گ گ جم θ جو کہ حد ۴۶ میں ہم ثابت کر چکے ہین

فرض کرو کہ اس سرعت منتسب کی سمت محور و لا سے زاویہ φ بناتی ہے

تو شکل سے معلوم ہوگا کہ مس φ = م۲ / م۱ = (گ جب α - گ جب β) / (گ جم α - گ جم β)

سوالات باب ششم

(۱) کسی شخص کو جو طرف پورب کے چار میل فی گھنٹہ سرعت سے دوڑتا ہے معلوم ہوا کہ ہوا عین شمال کے رخ سے آتی ہے اور جبکہ وہ دوگنی سرعت سے دوڑا تو معلوم ہوا کہ گوشہ شمال مشرق سے آرہی ہے تو بتاؤ کہ ہوا اصلمین کس طرف سے آتی تھی - اور اسکی سرعت کیا تھی

جواب شمال مغرب - سرعت = ۴ √۲

(۲) دو ذرے سرعت یکسان سے ایک سطح مین چل رہے ہین

کسی لحظہ مین اونکے درمیان کا فاصلہ = ا اور سرعت منتسب ایک کے بلحاظ دوسرے کے = گ اور اگر گ کو اس خط مین جو کہ دونون ذرونکو ملاتا ہے اور اس خط کے عمود مین منفصل کرین تو اجزاء منفصلہ گ$_1$ اور گ$_2$ ہونگے - ثابت کرو اون ذرونکا کم سے کم درمیانی فاصلہ $= \frac{\text{ا گ}_2}{\text{گ}}$ اور ابتدا سے اس ادنی فاصلہ پر پہنچنے مین اونکا $\frac{\text{ا گ}_1}{\text{گ}^2}$ وقت صرف ہوا

(۳) دو ذرے اسراع یکسان سے ایک خط مستقیم مین حرکت کرتے ہین تو ثابت کرو کہ اگر کسی لحظہ مین اونکی سرعتونکی نسبت اونکی اسراعونکی نسبت کے برابر ہو تو ایک کی سرعت منتسب بلحاظ دوسرے کے خط مستقیم مین ہوگی اور اگر نسبتین مذکورہ برابر نہون تو دریافت کرو کہ سرعت نسبت ایک کے بلحاظ دوسرے کے کسطرح کی ہوگی

(۴) ایک پہیہ جسکا قطر ۴ فٹ ہی چھ میل فی گھنٹہ سرعت سے گھومتا چلا جاتا ہے تو دریافت کرو کہ اسکے مرکز کے لحاظ سے اوسکی نقطہ راس اور نقطہ اسفل کی سرعت منتسب کیا ہے اور یہ بہی معلوم کرو کہ سطح زمین کے لحاظ سے اون دونو نقطونکی سرعتہائے منتسب کیا ہونگی

جواب (۱) ۸ر۸ اور –۸ر۸ (۲) ۱۷ر۶ اور صفر

(۵) کوئی پہیہ سطح زمین پر حرکت کرتا ہی - تو کسی لحظہ مین اوسکے نقطہ راس کے سرعت کی نسبت کسی اور نقطہ کی سرعت کے ساتھہ جو اسکے محیط مین ہو اور نہ زمین سے جسکی اونچائی قطر کے چوتھائی حصہ کے برابر ہی معلوم کرو - جواب ۲ : ۱

باب ہفتم

حرکت کا اول قانون

(۶۹) پچھلے ابواب مین ہمنے ذرہ کے صرف تبدیلی مقام پر بحث کی ہے۔ اور اسباب پر کہ وہ تبدیلی مقام کس وجہ سے واقع ہوتی ہے کچھ خیال نہین کیا - طاقت عاملہ حرکت کی ابتدائی علت ہے - لیکن واضح ہو کہ طاقت کا عمل ذرہ پر ناممکن ہے کیونکہ ذرہ سے جسم کا اقل حصہ مراد ہے - تو مناسب ہو کہ جسم کی حرکت کا بیان کرین اور یہ بھی دکھلا دین کہ ذرہ کی حرکت کے بیان سے جسم کی حرکت کسقدر سمجھہ مین آسکتی ہے -

(۷۰) واضح ہو کہ جسم ذرون سے مرکب ہے - اسلئے اگر ہم جسم کے ہر ایک ذرہ کی حرکت کو معلوم کرسکین تو کل جسم کی حرکت معلوم ہو جاوے گی مگر دقت یہ ہے کہ جسم کے ہر ایک ذرہ کی حرکت ایک قسم کی نہین ہوتی یعنے مختلف ذرے مختلف طور سے حرکت کرتے ہین - اگر دنیا مین خواہ کسی جسم کی حرکت پر خیال کرین تو معلوم ہو گا کہ اسمین کسیقدر حرکت مدورہ بھی موجود ہے ۔ ایسی حرکت کا بیان ریاضی کی اعلی شاخون سے متعلق ہے اسلئے یہان بیان نہین کرسکتے پس جس جگہہ متحرک جسم کا بیان آویگا وہان ہماری مراد یہ ہوگی کہ اسمین حرکت مدورہ بالکل نہین ہے اور اسکا ہر ایک ذرہ خطوط متوازی مین ایک ہی قسم کی

حرکت سے پہلتا ہے - اور ایسا فرض کرنے سے جسم کے ایک ذرہ کی حرکت سے تمام جسم کی
حرکت کی تعبیر کرے گی

(۱) حکیم مشہور نیوٹن صاحب نے ایک مدت دراز کے مشاہدہ سے مادہ کی
حرکت کے لئے تین قوانین دریافت کئے ہین جوکہ علم حرکت کی بنیاد ہین
حقیقت ہین جسم پر کسی معین طاقت کے عمل کا صحیح صحیح نتیجہ مشاہدہ سے
معلوم کرنا مشکل ہے - کیونکہ دنیا مین بہت سی طاقتین ایک ساتھہ ہی عمل
کر رہی ہین اور ان مین سے ہر ایک کو الگ الگ کرکے اُنکے عمل کی تاثیر
علیحدہ علیحدہ دریافت کرنا قریبًا ناممکن ہے - سب جگہہ ہوا کی تحریک
اور سطح حرکت کے کہردرے پن وغیرہ سے جسم متحرک کی حرکت مین
تبدیلی واقع ہوجاتی ہے اور سطح سے مشاہدہ کی صحت مین فرق پڑ
جاتا ہے مگر تب بھی ریاضی دانون نے حتے المقدور ان طاقتون کو علیحدہ
کرکے کسی معین طاقت کے نتیجہ کو دریافت کیا ہے - اور ان تینون
قوانین کو صحیح پایا -

(۲) حرکت کا اول قانون یہ ہے - دنیا مین ہر ایک جسم یا تو ساکن رہیگا
یا خط مستقیم مین سرعت یکسان سے حرکت کرتا رہیگا جب تک کہ کوئی
طاقت بیرونی اوسپر عمل کرکے اُسکی حالت سکون یا حرکت یکسان کو بدل
نہ دے - یعنے مادہ مین خود کسی طاقت کے پیدا ہونیکی قابلیت نہین ہے
جب کوئی جسم حالتِ سکون مین رہتا ہے تو خود اُسمین کوئی کسی طرح کی
بھی طاقت نہین کہ وہ اپنی جگہ کو بدل سکے اسلئے اوسمین حرکت پیدا

ہونے کے لئے کسی بیرونی طاقت کا عمل ضروری ہے - اسیطرح جب کہ کسی
طاقت کے عمل سے جسم مین حرکت پیدا ہو جاوے تو خود اُسمین یہ طاقت
نہین کہ پھر حالت سکون مین آ جاوے یا اُس حرکت کو کسیطرح بدلے
پس ساکن شی مین حرکت پیدا ہونا یا حرکت پیدا شدہ مین تبدیلی واقع
ہونا بیرونی طاقت کی عمل سے ہی ہو سکتا ہے -

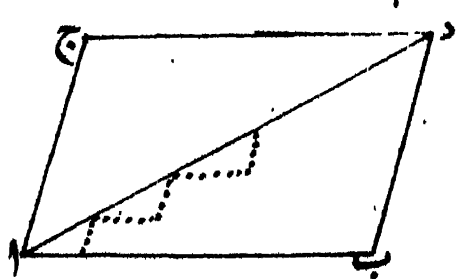
اس قانون سے معلوم ہوتا ہے کہ جب ایکدفعہ کسی جسم مین حرکت پیدا
ہو چکے تو پھر وہ جسم اُس حرکت کے ساتھہ برابر چلتا رہیگا - لیکن یہ
ضرور نہین ہے کہ جب تک وہ چلتا رہے اُسمین وہ طاقت جس سے
حرکت پیدا ہوئی تھے برابر موجود رہے - اگر کوئی دوسری طاقت
حرکت پیدا شدہ کو زائل نہ کرے یا نہ بدلے تو وہ جسم دائماً خط مستقیم
مین حرکت کرتا رہیگا - کمان سے تیر نکلکر اس قانون کے بموجب
برابر حرکت مین نہین رہتا اسکا باعث یہ ہے کہ ہوا کی ٹکریک اور
زمین کی کشش اور سطح حرکت کے کھردرا پن وغیرہ مخالف طاقتون
سے یہ حرکت رفتہ رفتہ گھٹتی جاتی ہے - پس علمانے یہ ثابت کیا ہے
کہ جسقدر اون مخالف طاقتون کو مختلف ذریعون سے کم کرتے جائینگے
اسیقدر جسم متحرک کی حرکت یکسان خط مستقیم مین زیادہ دیر تک قائم
رہیگی - مثلاً تجربہ کیا گیا ہے کہ اگر کسی جسم کو سطح برف پہ پھیلا یا جاوے
تو وہ بہت دور جاکر ٹھہرتا ہے اور اُسکی سرعت یکسان بھی بہت آہستہ آہستہ
بدلتی جاتی ہے -

علمانے اس قانون کو زیادہ تر عمدہ ترکیب سے ثابت کیا ہے وہ ترکیب
یہ ہے کہ اگرچہ وہ طاقتین جو جسم کی حرکت مین تغیر پیدا کرتی ہین
بالکل دور نہین ہوسکتین تاہم برابر مقدار کی طاقتین مخالف سمت
مین لگا کر ہم اون مخالف طاقتون کو زائل کرسکتے ہین - ہم جانتے
ہین کہ جب مخالف طاقتونکے عمل کے باعث جسم حالت اعتدال مین رہتا ہے
اور بعدازان اس جسم مین حرکت پیدا کی جاوے تو وہ مخالف طاقتین اس
حرکت پر کچھ اثر نہین رکھتین - پس مشاہدے سے تحقیق ہوا ہے کہ ایسی حالت
مین جسم کی حرکت ہمیشہ حرکت کے اول قانون کے موافق ہے -
باب یازدہم مین اٹیوڈ صاحب کے آلہ کے بیان مین اس تجربہ کی تصدیق
ہوجاوے گی -

باب ہشتم

حرکت کا دوسرا قانون

(۲۰) حرکت کے دوسرے قانون کے دو حصے ہین - اوّل یہ کہ جسم پر طاقت عاملہ کا اثر ہر حالت مین اُسکی اپنی سمت خط مستقیم مین ہوتا ہے دوم یہ کہ جسم مین طاقت کے عمل سے جو اسراع پیدا ہوتا ہے اُسکی مقدار طاقت مذکور کی مقدار کی متناسب ہے -

اول حصہ کے معنی یہ ہین کہ اگر کوئی جسم حالت سکون مین ہو یا متحرک ہمین اگر ایک یا ایک سے زیادہ طاقت عمل کرے تو ہر ایک طاقت ویسا ہی عمل کریگی جیسا کہ وہ اکیلی ہونے کی حالت مین کرتی - مطلب یہ ہے کہ جب وہ طاقتین باہم عمل کرتی ہین تو ایک دوسرے کے عمل مین یا اُس جسم کی موجودہ سرعت مین کچھہ دخل نہین دیتین پس دنیا مین اور اشیا کی طرح طاقت بھی ضائع نہین ہوتی دوسری کوئی طاقت اُسپر عمل کرکے صرف اُسکی صورت مین تغیر پیدا کر دیتی ہے

اسکا مطلب شکل مندرجہ ذیل سے ظاہر ہوگا فرض کرو کہ کسی جسم پر جو نقطہ ا پر واقع ہو دو طاقتین اب

اور اج کی سمت مین عمل کرتے ہین - اور ایک لحظہ عمل کرکے جو سرعتین پیدا کرتی ہین وہ جداگانہ خط اب اور اج سے تعبیر ہوتی ہین - اب سرعتون کے متوازی الاضلاع کے اصول سے ظاہر ہے کہ حاصل سرعت وتر آد سے تعبیر ہوگی - حرکت کے دوسرے قانون سے بخوبی معلوم ہو جائیگا کہ کیونکر ان دونو سرعتون کے ساتھہ جسم خط آد پر حرکت کرتا ہے اُس قانون کے بموجب دونو طاقتون کا عمل ایکدوسرے سے بالکل علیحدہ ہے اسلئے ظاہر ہے کہ کسی نہایت قلیل عرصہ مین جبکہ جسم سرعت آب کے ساتھ خط اب پر حرکت کرنے لگتا ہے تو اُس عرصہ مین وہ بسبب دوسری سرعت کے خط آج پر بھی حرکت کرنیکو مائل ہے علے ہذا القیاس ہر لحظہ مین یہی عمل وقوع مین آتا ہے اور اُسکا یہ نتیجہ ہوتا ہو کہ انجام مین ذرہ نقطہ دٓ پر پہونچتا ہے ذرہ کی اسطور کی حرکت مین دونو طاقتونکا عمل علٰحدہ علٰحدہ ظہور مین آتا ہے کیونکہ اگر صرف پہلی طاقت عمل کرتی تو ذرہ ۱ اکائی وقت کے انجام مین نقطہ بٓ پر پہونچتا اور اگر صرف دوسری طاقت عمل کرتے تو نقطہ جٓ پر - اب ذرہ نقطہ دٓ تک پہنچا تو ہم خیال کرسکتے ہین کہ اُسنے پہلی طاقت کے سبب سے خط آد کو طی کیا اور دوسرے کی سبب سے ب دکو جو کہ آج کے برابر ہے یعنے دونو طاقتون کے علٰحدہ علیحدہ عمل سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ویسا ہی حاصل ہوا - دو سے زیادہ طاقتون کے لئے بھی یہ دلیل کارآمد ہوسکتی ہے -

حرکت کے دوسرے قانون کی مثال اکثر مشاہدہ مین آتی ہے - جب
کوئی ملاح اپنی ناؤکو ایک کنارہ سے دوسرے کنارہ تک لیجانا چاہتا ہے
تو اسی قانون کی پابندی سے مقابل کے کنارہ پر سیدھا نہین جاسکتا
مگر موج کے زور سے کچھ نیچے چلا جاتا ہے - ایک عمدہ مثال یہ بھی
ہے کہ جب کسی جہاز کے مستول سے کوئی گیند گرے تو جہاز روان ہو یا
نہو وہ گیند عین اوس مستول کے پاؤن مین گرتی ہے - یا اگر کوئی
شخص روانہ ریل گاڑی پر سے ایک گیند کو سمت راس مین پھینکے تو وہ
اسی کے ہاتھ پر پھر آپڑتی ہے - اب دیکھنا چاہئے کہ گیند کو مستول کے
سرے سے پاؤن تک گرنے مین جو وقت صرف ہوا ہی اسوقت مین جہاز
بھی کچھ فاصلہ پر چلا ہوگا تو گیند اتنا فاصلہ پیچھے کیون نہ گرے اسکا
سبب یہ ہی کہ جس سرعت سے جہاز حرکت کرتا تھا وہ سرعت گیند مین
بھی اشتراکاً موجود تھی اور کشش ثقل کے عمل کے باعث نیچے گرنے مین
اسکی سرعت مذکورہ مین کچھ فرق پیدا نہین ہوتا یعنے گیند بسبب
اپنی سرعت مشترکہ کے اوتنا ہی فاصلہ خط افقی مین طی کرگئی جتنا
کہ کشش ثقل کے عدم موجودگی مین طی کرتی اور اسیطرح کشش ثقل کا
عمل بھی اوسپر ویسا ہی ہوگا جیسا کہ جہاز کے ساکن رہنے سے ہوتا ہے
پس نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ ان دونو سببون سے گیند مستول کے عین
پاؤن پر گرتی ہے -

(۷۵) اس قانون سے یہ بھی ظاہر ہوتا ہے کہ جب کوئی طاقت مستقلہ

کسی جسم پر عمل کرے تو اُسکے نتیجہ مین اسراع یکسان پیدا ہوتا ہے کیونکہ اگر کوئی طاقت جسم پر یک لحظہ تک عمل کرے تو اُسکے نتیجہ مین جو سرعت پیدا ہوتی ہے حرکت کے پہلے قانون کے روسے اُس سے جسم شئے یکسان متحرک رہتا ہے - اسلئے اگر پھر دوسرے لحظہ مین وہی طاقت عمل کرے تو اُس سے جونئی سرعت پیدا ہوتی ہے وہ اور سرعت اول ملکر دوچند ہوجاتی ہین - اسیطرح اگر وہ طاقت کچھ عرصہ تک عمل کرتا رہے تو جسم کی سرعت رفتہ رفتہ یکسان بڑھ جاتی ہے اگویا جسم اسراع یکسان سے چلتا ہی جو طاقت جسم پر کچھ عرصہ تک عمل کرتی ہو اور جسکی مقدار برابر رہتی ہو اسی طاقت مستقلہ کہتے ہین صدمہ وغیرہ کی طاقتون سے اُس مین فرق ہے

(۷۶) حرکت کے دوسرے قانون کا حصہ دوم یہ ہے کہ طاقت کے عمل سے جو جسم پر اسراع پیدا ہوتا ہے وہ ہمیشہ طاقت کی مقدار کا متناسب ہے - اس قانون کی بخوبی سمجھنے کے لئے اول جسم اور طاقت کے ماپنے کے طریقہ پر خیال کرنا واجب ہے

(۷۷) بیان ہو چکا ہے کہ طاقت مستقلہ سے جسم مین اسراع یکسان پیدا ہوتا ہے - جہان کہ طاقت کے عمل سے جسم پر کوئی حرکت پیدا ہوئی ہو وہان ضرور کوئی اور طاقت مخالف سمت مین عمل کرکے اُسے زائل کردیتی ہوگی - اور یہ بھی ظاہر ہے کہ جسم کا مقدار خواہ کسیقدر صغیر یا کبیر ہو اگر کوئی طاقت مخالف نہو تو طاقت عاملہ اُسپر ضرور کسیقدر حرکت پیدا کریگی ہم اپنی قوت بدنی سے کسی بہت بھاری پتھر کو اٹھا نہین سکتے ہین -

اسکا یہ سبب ہو کہ کشش ثقل اُس پتھر پر جو کہ ہماری طاقت کے مخالف اور مقدار
مین زیادہ ہے عمل کرکے اوسے زائل کر دیتی ہے

(۷۸) چونکہ طاقت غیر محسوس ہے اور صرف حرکت پیدا کردہ سے اُسے
معلوم کرتے ہین اسلیئے اوسکے مقدار کے ناپنے کے لیئے بھی اُس حرکت
پر ہی غور کرنا آسان طریقہ ہے۔ اسکے لیئے عالمون نے مفصلہ ذیل
قاعدہ مقرر کیا ہے یعنی فرض کرو کہ کوئی طاقت مستقلاً کسی جسم پر کسی وقت
معین تک عمل کرکے کسیقدر سرعت پیدا کرتی ہے تو صاف ہو کہ کوئی
طاقت جو کہ اُسی جسم پر اُسی وقت تک عمل کرکے اُسکے دو چند سرعت
پیدا کرے وہ طاقت اول طاقت سے مقدار مین دو چند ہوگی۔ یعنی اگر
طاقت اول مقدار (۱) سے تعبیر کیا جاے تو طاقت دوم مقدار (۲)
سے تعبیر ہوگی اسی طرح طاقت اُس جسم پر اُسی وقت تک عمل کرکے سہ چند
سرعت پیدا کرتی ہو وہ مقدار مین بھی طاقت اول کے سہ چند ہوگی یعنے
مقدار (۳) سے تعبیر ہوگی اور علی ہذا القیاس۔ پس اس طرح طاقت کی
پیمائش جسم کی اکائی سرعت کی اکائی اور وقت کی اکائی تینون پر منحصر
ہے یعنے یہ تین اکائیان مختلف لینے سے طاقت کی اکائی بھی مختلف
ہوجائیگی۔ حکماء بنظر سہولیت ایک ایسے طاقت کو اکائی فرض کرتے ہین جو کہ
اکائی جسم پر اکائی وقت تک عمل کرکے اکائی سرعت کو پیدا کرتی ہے۔
مثلاً۔ اگر ایک سکنڈ اکائی وقت اور ایک فٹ اکائی فاصلہ ہو تو جو طاقت
اکائی جسم پر ایک سکنڈ تک عمل کرکے ہر سکنڈ مین ایک فٹ کے حساب

سرعت پیدا کرے اُسی مقدار (۱) سے تعبیر کیا جائیگا - اور اسیطرح جو طاقت
اُسی جسم پر ایک سیکنڈ تک عمل کرکے فی سیکنڈ مین ۱۰ فٹ کے حساب
سرعت کو پیدا کرے اُسکو مقدار (۱۰) سے تعبیر کیا جائیگا - اسطرح کی جو اکائی
طاقت لیجاتی ہے اوسے عملی اکائی طاقت کہتے ہین -

(۷۶) جسم کسے کہتے ہین ہر ایک کو معلوم ہے لیکن زبان سے اسکی
تعریف مشکل ہے مختصراً جو شئے طاقت سے منفعل ہونیکی قابلیت رکھتی
ہے اوسے جسم کہتے ہین مثلاً کسی شئے کا عرض یعنے رنگ طول وغیرہ
خاصیتین طاقت کو عمل کی قابلیت نہین رکھتے ہین اسلئے یہ خاصیتین
جسم کے معنی مین داخل نہین - زمین پر جو شئے موجود ہے سب پر کشش
ثقل عمل کرکے اُسمین وزن پیدا کردیتی ہے - پس اگر شئے کو ایسی جگہ پر
پہنچانا ممکن ہوتا جہان کشش ثقل عمل نہ کرے تو اُسکا وزن کچھ نہ رہتا
مگر اُسکا جسم موجود رہیگا - چنانچہ ہم یہ کہہ سکتے ہین کہ جس خاصیت کے
موجود ہونیسے کشش ثقل شئے مین وزن پیدا کرتی ہے وہی اُس شئے
کا جسم کہلاتا ہے - جسم پر طاقت عائد ہونے کے نتیجہ کی کمی زیادتی دیکھکر
جسم کی بھی کمی بیشی معلوم ہوتی ہے - مثلاً اگر کوئی طاقت کسی جسم پر کسی
وقت معین تک عمل کرکے سیکنڈ مین دس فٹ کے حساب سرعت
پیدا کرے اور یہی طاقت کسی دوسرے جسم پر اُسی وقت تک عمل کرکے
سیکنڈ مین صرف پانچ فٹ کے حساب سرعت پیدا کرے تو صاف ظاہر ہے
کہ یہ دوسرا جسم جسم مذکورہ سے دو چند ہے اسیطرح جسقدر سرعت کم

پیدا ہوگی جسم کا مقدار جسقدر زیادہ دریافت ہوگا جسم مین ایک ہی طاقت کے عمل سے جو سرعت کی کمی بیشی معلوم ہوتی ہے تو اُسکا سبب یہ ہے کہ جسم ذرات کا ایک مجموعہ ہے اور چونکہ ہر ذرہ یکسان ہے اسلئے اگر کوئی طاقت کسی ایک ذرہ پر عمل کرکے ایک سیکنڈ مین ۵ فٹ کے حساب سرعت پیدا کرے تو کل جسم مین ۵ فٹ کے حساب سرعت کو پیدا کرنے کے لئے اوسقدر زیادہ طاقت درکار ہے جسقدر کہ اُس جسم مین ذرون کا مقدار ہے اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ مختلف اجسام مین ایک ہی سرعت کو پیدا کرنیکے لئے طاقت عاملہ کا مقدار جسم کے مقدار کے متناسب ہونا چاہئے مہندسین سہولت کے لئے ایسے ایک جسم کو اکائی فرض کرتے ہین کہ جسپر اکائی طاقت اکائی وقت تک عمل کرکے اکائی سرعت کو پیدا کرے یعنی جسمین اکائی اسراع کو پیدا کرے

(۸۶) پس بحث مذکورہ بالا سے ظاہر ہے کہ جب جسم کا مقدار مستقل رہے تو کوئی طاقت اوسپر عمل کرکے جو اسراع پیدا کرتی ہے اُسکا مقدار طاقت عاملہ کے مقدار کے متناسب ہوتا ہے یعنے اگر ط اور ع علی الترتیب جسم ج پر طاقت عاملہ کو اور اسراع پیدا شدہ کو تعبیر کرے

ہو تو ط ∝ ع جبکہ ج مستقل ہے

اور یہ بھی ثابت ہوچکا ہے کہ ایک ہی اسراع پیدا کرنے کے لئے طاقت عاملہ کا مقدار جسم کے مقدار کے متناسب ہونا چاہئے یعنے ط ∝ ج جبکہ ع مستقل ہے

∴ جبکہ اسراع اور جسم دونو غیر مستقل تو ط ∝ ج ع

∴ ط = م ج ع جہانکہ م ایک مقدار مستقل ہے
اور جسکی قیمت طاقت اور جسم اور اسراع کی اکائیون پہ منحصر ہے لیکن
یہ بیان ہوچکا ہے کہ حکمانے ایسی ایک طاقت کو اکائی فرض کیا ہے
جو کہ اکائی جسم پہ عمل کرکے اکائی اسراع پیدا کرتی ہے - اسلئے اگر
طاقت کی یہ اکائی مان لیجائے تو

۱ = م × ۱ × ۱ یعنی م = ۱

∴ ط = ج ع × اکائی طاقت مذکورہ بالا

یعنے جو طاقت ج جسم پہ عمل کرکے ع اسراع کو پیدا کرتی ہے
اسکا مقدار ج × ع گنا اکائی طاقت کا ہے

(۸۱) حد ۳۳ مین بیان ہوچکا ہے کہ اگر کوئی ذرہ اسراع ع کے ساتھ
س وقت تک شروع سے چلکر آخر مین ل سرعت حاصل کرے تو ل = ع س
∴ ط = ج ل / س اس سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر وقت حرکت مقدار مستقل ہو
تو ط ∝ ج ل اور اگر اس طاقت کو اکائی فرض کی جاوے جو کہ اکائی
جسم پر عرصہ س تک عمل کرکے اکائی سرعت حاصل کراتی ہے تو یہ نسبت
مساوات ہوجاتی ہے یعنے ط = ج ل

(۸۲) تعریف - اگر کسی لحظہ مین کوئی جسم ج سرعت ل سے چلتا
ہو تو ج × ل اس مقدار کو اس لحظہ مین جسم کی قوت حرکت کہتے ہین -
اس تعریف کا مطلب بیان ذیل سے حاصل ہوگا - فرض کرو کہ کوئی
جسم ج کسی لحظہ مین سرعت ل سے کسی سمت مین چلتا ہے -

اگر وہان اسکی حرکت روک دی جاوے تو اوسکی حرکت کے روکنے کے لئے کسی طاقت کا ہونا ضرور ہے - ظاہر ہے کہ جسقدر طاقت اوس لمحہ مین اوس جسم پر اوس سرعت کو پیدا کرنیکے قابل تھے اسکی مزاحمت کیلئے بھی اسیقدر طاقت کے ہونیکی ضرورت ہے - یعنے ج × ل سے طاقت تعبیر شدہ اوس مزاحم طاقت کو بھی تعبیر کریگی - اور ج × ل کی قیمت ل کے متناسب ہو یعنی جسم کی سرعت کم یا زیادہ ہونے سے اسکی قیمت بھی کم و بیش ہوتی ہے - اسی سبب سے ج × ل مقدار کو جسم کے اس لمحہ کی قوت حرکت کہنا درست ہو -

قوت حرکت

(۸۳) ایسا خیال نکرنا چاہیئے کہ جسم کی سرعت کی زیادتی ہے اوسکی کی زیادتیکا باعث ہے بلکہ جو جسم زیادہ طاقت سے متحرک کیا گیا ہو اوسکی سرعت بھی زیادہ ہوتی ہے اسلئے طاقت عاملہ ابتدائی کی زیادتی کو قوت حرکت کی زیادتی کا باعث سمجھنا چاہیئے - مثلاً توپ کے گولہ کے قوتِ حرکت بہت ہے اوسکا یہ سبب نہین کہ اوسکی سرعت زیادہ ہے بلکہ اوسکا سبب یہ ہے کہ وہ ابتدا مین زیادہ طاقت سے متحرک کیا گیا ہے

(۸۴) ط = ج ل اس مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ جسم کی قوتِ حرکت کسی لمحہ مین نہ صرف ل پر بلکہ ج پر بھی منحصر ہے یعنے اگر دو مختلف اشیاء کی سرعت کسی لمحہ مین مساوی ہو تو اس شئے کی قوتِ حرکت زیادہ ہوگی جسکے جسم کا مقدار زیادہ ہے - مثلاً بندوق کی گولی کا جسم صغیر ہے لیکن سرعت زیادہ ہونے سے اوسکی قوتِ حرکت بہ نسبت ایک پہاری

پتھر کے جو تھوڑی سی سرعت سے متحرک ہو زیادہ ہو سکتی ہی۔

(۸۵) جب کوئی شئے سرعت مستوی سے متحرک ہے تب بھی ج × ل کو اوسکے قوتِ حرکت کہا جاتا ہے اس حالت مین شئے پر کوئی طاقت عمل نہین کرتی لیکن حرکت پیدا کرنیکے لئے ابتدا مین کوئی صدمہ وغیرہ کی طاقت ضرور لگائی گئی ہوگی جسکا مقدار اس قوتِ حرکت سے تعبیر ہوتا ہے - یہان ل ایک مقدار مستقل ہے اسلئے قوتِ حرکت بھی ہر لحظہ مین مستقل رہیگی -

(۸۶) جب طاقت مستقلہ عمل کر کے جسم پر اسراع یکسان پیدا کرتی ہے اوس حالت مین ل کا مقدار ہر لحظہ مین بدلتا رہتا ہے اور اکائی وقت مین اسکے تبدیلی کو ہم اسراع کہتے ہین اسلئے صاف ہو کہ اگر ع اوس اسراع کو تعبیر کرے تو ج × ع قوتِ حرکت کی اکائی وقت مین تبدیلی کو تعبیر کریگی - اسکو ہم جسم کی قوت اسراع کے نام سے نامزد کرینگے -

(۸۷) چونکہ طاقت عاملہ اور جسم اور اسراع پیدا شدہ ہر ستہ کی نسبت درمیانی نسبت ذیل سے ظاہر ہے

یعنے ط ∝ ج × ع

اسلئے حرکت کے دوسرے قانون کا بیان اسطرح بھی ہو سکتا ہے یعنے جسم پر طاقت عاملہ کا مقدار اسراع پیدا شدہ کے مقدار کے متناسب ہو جسطرح کی اکائی طاقت اور اکائی اسراع اور اکائی جسم کے فرض کرنے سے یہ نسبت مساوات کے طور پر ہو جاتی ہے اوسکا بیان حد (۸۰) مین ہو چکا ہے

(۸۸) جب کوئی جسم سرعت مستوی (رگ) سے کسی دائرہ کی محیط

مین حرکت کرتا ہے اسکا اسراع مرکز کی سمت مین برابر $\frac{\text{گ}^2}{\text{ر}}$ کے ہے یعنی اس اسراع کے ساتھہ وہ جسم مرکز کی طرف جانیکی کوشش کرتا ہے (بموجب حد ۸ ہ)

$$\text{اسلئے اُسکا قوت اسراع} = \frac{\text{ج گ}^2}{\text{ر}}$$

اور چونکہ جسم ہر لحظہ مین مرکز کے ایک مستقل فاصلہ پر رہتا ہے اسلئے ظاہر ہے کہ ہر لحظہ مین مرکز کے مخالف سمت مین ایک طاقت اُس جسم پر عمل کرسکے اوسکے مرکز کی طرف حرکت کو روک دنیتے ہین - ایسی طاقت کو قوت ہاربہ کہتے ہین اور اسکی قیمت جسم کی قوت اسراع مذکور کے برابر ہے اُس طاقت کے پیدا ہونیکا سبب باب آئندہ مین بیان ہوگا ؛

باب نہم

سوم قانون حرکت

(۸۹) جہان جسم مفرد ہے وہان طاقت معین کے عمل سے جو حرکت پیدا ہوتی ہے اُس کا بیان حرکت کے اول اور دویم قانون سے متعلق ہے لیکن جب جسم ایک سے زیادہ ہین اور ایک دوسرے پر کسیطرح عمل کرتے ہین تو اُنکی حرکت کا صحیح بیان قانون سیوم سے متعلق ہے۔ وہ قانون حسب ذیل ہے ؛

جب ایک شے کسی دوسری شے پر کسی سمت مین کسیطرح پر عمل کرتی ہے تو دوسری شے بھی اول شے پر سمت مخالف مین مقدار مساوی سے عمل کرتی ہے یعنی اشیاء کا باہمی عمل مقدار مین مساوی ہے مگر سمت مین مخالف ،،

(۹۰) اشیاء ساکن ہون خواہ متحرک اُس کا باہمی عمل ہر حالت مین مساوی ہے۔ اور سمت مین مخالف۔ امثلہ ذیل سے اس کا مطلب معلوم ہوجائیگا ؛

(۹۱) کوئی شے میز پر رکھی ہوئی ہے کشش ثقل کے سبب سے وہ میز کو دباتے ہے ظاہر ہے کہ ہمیشہ وہ شے زمین کے مرکز کی طرف حرکت کرنیکو ساعی ہے اور میز جسپر وہ دھری ہے سمت مخالف مین اُس پر فعل انفعالی سے مساوی عمل کرکے اُسے اعتدال مین رکھتی ہے ؛

(ب) جب کوئی شے کسی رسی یا لاٹھی سے دوسری شے کو کھینچے تو وہ دوسری شے بھی اُسے اپنی طرف مساوی طاقت سے کھینچتی ہے یعنی رسی کے ہر ایک نقطہ مین طاقت کشش مقدار مین مساوی ہے علم سکون مین یہ نتیجہ اکثر مانا ہوا ہے ۔

(ج) جب کوئی شے کسی دوسری شے کو صدمہ دیکر اُسکی حرکت مین تبدیلی واقع کرتی ہی تو دوسری شے کے صدمہ سے اسکی اپنی حرکت مین بھی طاقت مساوی سے سمت مخالف مین تبدیلی واقع ہوتی ہے

(د) اگر کوئی شے کسی دیوار پر ٹھوکر کھائے تو دیوار بھی اُس پر مساوی طاقت سے سمت مخالف مین عمل کرتی ہے اور اِسی سبب سے شے لوٹ کر واپس آتی ہے ۔

(ہ) جب ایک شے دوسری شے کو کسی طاقت سے کھینچے تو شے مجرور بھی طاقت مساوی سے شے اول کو اپنی طرف کھینچتی ہے۔ اور یہ اشیا ساکن ہون خواہ متحرک اُنکی کشش ایک دوسری پر ہر حالت مین مساوی ہے مثلاً زمین جس طاقت سے کسی شے پر کشش کرتی ہے وہ شے بھی برابر طاقت سے مخالف سمت مین زمین کو کشش کرتی ہے ۔

(۱۹) یہ شبہ نکرنا چاہیے کہ اشیا مساوی فعل فعالی اور فعل انفعالی کے علاوہ تقاضے سے حالت سکون مین رہینگین اور اُنمین سے ہر ایک کی حرکت ناممکن ہے یعنی جب کوئی گھوڑا کسی گاڑی کو کھینچتا ہے تو گاڑی بھی اُسی طاقت سے اگر گھوڑے کو کشش کرے تو ہر دو حالت سکون مین رہجاینگے

یہ شک غلطی پر مبنی ہے - کیونکہ حرکت کے قانون سیوم کا مطلب
یہ نہین کہ طاقت بیرونی کے عمل سے جسم پر حرکت نہ ہوگی بلکہ خلاصہ
یہ ہے کہ دو اشیا کا عمل باہمی مساوی ہے یہ عمل باہمی بھی طاقت بیرونی
کی طرح اسراع پیدا کرنیکی قابلیت رکھتا ہے شئے متحرک کے جسم کا مقدار
اور طاقت عاملہ کے مقدار ہردو پر خیال نہ رکھنے کی سبب یہ غلطی واقع ہوتی
ہے - مثال سے غور کرو کہ گھوڑا گاڑی پر جس طاقت سے عمل کرتا ہے
وہ اسکے بدن کے جسم سے متعلق نہین ہے بلکہ یہان اب کہنا لازم ہے کہ
گھوڑی کی طبیعی طاقت اپنے بدن اور گاڑی دونو جسم پر عمل کرکے حرکت
پیدا کر رہی ہے اجسام کا عمل باہمی اور اونپر طاقت بیرونی کا عمل ان
ہردو مین بڑا اختلاف سمجھنا چاہیئے - حرکت کے دوسرے قانون کے
بیان سے ہمین معلوم ہوا ہے کہ جب کبھی کسی جسم پر کوئی بیرونی طاقت
عمل کرتی ہے خواہ وہ طاقت کسی دوسری شئے کی کشش وغیرہ سے
پیدا ہوئے ہو یا اور کسی طرح سے تب اگر کوئی طاقت مخالف موجود نہو
تو اُسمین حرکت ضرور پیدا کریگی مثلاً کسی میز پر رکھی ہوئی چیز اوسپر
جو دباؤ کرتی ہے اُس سے میز کی حرکت ضرور ہوسکتی ہے لیکن زمین
کے فعل انفعالی نے مخالف سمت مین عمل کرکے اُسی اعتدال مین رکھا
ہے اسطرح میز بھی وس شئے پر جو عمل مخالف کر رہی ہے اس سے
شئے کے اوپر کیطرف حرکت ہوسکتی ہے لیکن کشش ثقل نے
اُسکے برخلاف عمل کرکے اسی اعتدال مین رکھا ہے -

حرکت پیدا ہوتی ہے دوسرے قانون سے ظاہر ہے کہ ایک ہی طاقت مختلف اجسام پر عمل کر کے مختلف اسراع پیدا کرتی ہے اسلئے دونون اشیا جو باہمی عمل کرتے ہین اگر اون کا جسم مختلف ہو تو مساوی عمل سے بھی اُنکی حرکت پیدا شدہ مختلف ہوگی اسی طرح کسی گیند کی کشش زمین پر اور زمین کی کشش گیند پر باہم مساوی ہے مگر گیند کا جسم چونکہ نہایت صغیر ہے اِسلئے زمین کی عمل سے اُسمین جو اسراع پیدا ہوتا ہے وہ بہت زیادہ ہے اور زمین کا جسم بہت زیادہ ہونیکے سبب گیند کی کشش سے اُسمین جو اسراع پیدا ہوتا ہے نہایت کم بلکہ غیر محسوس ہے *

(۹۲) بیان متذکرہ بالا کا علامات جبریہ سے اِسطرح لکھا جاتا ہے فرض کرو کہ ج اور جَ دو اشیاء کے جسم ہین اور اُن کے باہمی عمل کی طاقت کا مقدار ط سے تعبیر ہے اور اس عمل سے ہر دو مین جو اسراع پیدا ہوتے ہین وہ ع اور عَ ہین تو

ط = ج × ع

ط = جَ × عَ

∴ ج ع = جَ عَ

∴ ع/عَ = جَ/ج

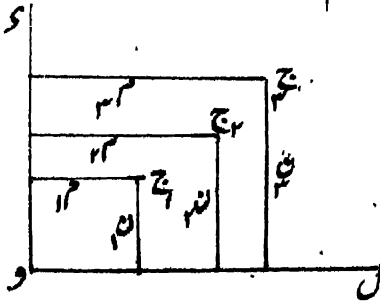
یعنی اسراع پیدا شدہ شئی معمول* کے جسم کے مقدار سے نسبت معکوس رکھتا ہے *

---

* شئی معمول سے وہ جسم مراد ہے جسپر طاقت عامہ عمل کرتا ہو

باب دہم

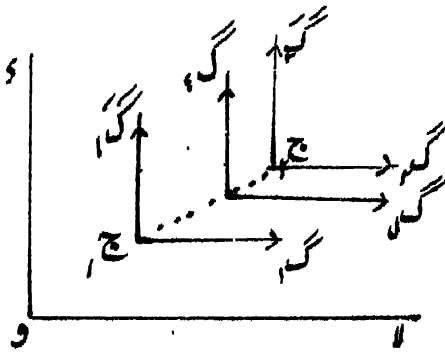
اجسام کے مرکز ثقل کی حرکت کے بیان مین

(۹۳) جسم کے مرکز ثقل کا بیان علم سکون سے متعلق ہے اور جبکہ اجسام کے مقامات معلوم ہون تو ان کے مرکز ثقل کا مقام دریافت کرنیکا طریق بھی اسی مین درج ہے مگر سہولیت کے لئے کچھ بطور خلاصہ بیان لکھتے ہین ۔

فرض کرو کہ ج۱ و ج۲ و ج۳ وغیرہ اجسام کے مقادیر ہین اور و ل اور و ی دو محور علی التوائم ہین جنکے وسیلہ سے اجسام کے مقامات کی تحدید معلوم ہین یعنی و ی محور سے اجسام کے بُعد جداگانہ م۱ و م۲ و م۳ .... وغیرہ ہین اور و ل محور سے ان کے بُعد جداگانہ ن۱ و ن۲ و ن۳ .... وغیرہ ہین تو علم سکون مین ثابت ہے کہ اگر ان کے مرکز ثقل کا ان محورون سے فاصلہ جداگانہ ن̄ اور م̄ ہو تو

$$\bar{\text{م}} = \frac{\text{ج}_1\text{م}_1 + \text{ج}_2\text{م}_2 + \text{ج}_3\text{م}_3 \cdots \text{وغیرہ}}{\text{ج}_1 + \text{ج}_2 + \text{ج}_3 \cdots \text{وغیرہ}} = \frac{\Sigma(\text{ج م})}{\Sigma(\text{ج})} \ \text{مختصراً}$$

اور

$$\bar{\text{ن}} = \frac{\text{ج}_1\text{ن}_1 + \text{ج}_2\text{ن}_2 + \text{ج}_3\text{ن}_3 \ \text{وغیرہ}}{\text{ج}_1 + \text{ج}_2 + \text{ج}_3 \cdots \text{وغیرہ}} = \frac{\Sigma(\text{ج ن})}{\Sigma(\text{ج})} \ \text{مختصراً}$$

(۴۹) دو اجسام ج۱ اور ج۲ ایک ہی سطح مین حرکت کر رہی ہین۔ کسی لحظہ معین مین اُنکے مرکز ثقل کی سرعت دریافت کرو

فرض کرو کہ سطح حرکت مین دو محور علی القوائم وَل اور وَی لئے گئے ہین اور کسی خاص لحظہ مین فاصلہ اجسام کے انسے جداگانہ ن۱

م۱ اور ن۲ م۲ ہین اب انفصال سرعت کے قاعدہ سے اجسام کی سرعتونکو محور ونکے متوازی منفصل کرو فرض کرو کہ وَل کے متوازی ہر دو سرعت کی اجزا منفصلہ گ۱ اور گَ۱ ہین اور وَی کے متوازی اُنکی اجزا منفصلہ جداگانہ گ۲ اور گَ۲ ہین اسلئے اگر اُس لحظہ معینہ مین اجسام کے مرکز ثقل کا فاصلہ محور وَی سے مَ ہو تو

$$م = \frac{ج_1 م_1 + ج_2 م_2}{ج_1 + ج_2}$$

لیکن ایک عرصہ قلیل س کے بعد یہ اجسام اپنے اپنی مقام سے محور وَل کے متوازی جداگانہ گ۱ × س اور گَ۱ × س فاصلہ طے کرینگے اسلئے اگر س عرصہ کے آخر مین مرکز ثقل کا فاصلہ محور وَی سے مَ ہو تو

$$مَ = \frac{ج_1 \{ م_1 + گ_1 س \} + ج_2 (م_2 + گَ_1 س)}{ج_1 + ج_2}$$

اسلئے اس محور کے متوازی مرکز ثقل کا فاصلہ طے شدہ

$$= \text{مَ} - \text{م} = \frac{(\text{ج}_1 \text{گ}_1 + \text{ج}_2 \text{گ}_2)\,\text{س}}{\text{ج}_1 + \text{ج}_2}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر اُس لحظہ مین مرکز ثقل کی سرعت کا جزو منفصلہ
و ل کے متوازی گل ہو تو

$$\text{گل} = \frac{\text{ج}_1 \text{گ}_1 + \text{ج}_2 \text{گ}_1}{\text{ج}_1 + \text{ج}_2}$$

$$\therefore \text{گل}\,(\text{ج}_1 + \text{ج}_2) = \text{ج}_1 \text{گ}_1 + \text{ج}_2 \text{گ}_1$$

مگر ج۱ × گ۱ اور ج۲ گ۱ اوس لحظہ مین اجسام کے و ل محور کے متوازی
قوت حرکت کے اجزائے منفصلہ ہین اسلئے اس مساوات سے یہ ظاہر ہوتا
ہے کہ اگر متحرک جسمونکی قواے حرکت کو ہم کسی خاص سمت مین منفصل کریں
تو ان اجزاء منفصلہ کا حاصل جمع اُس قوت حرکت کے مساوی ہوتا
ہے جیسا کہ وہ تمام اجسام مجتمع ہوکر ایک ذرہ کی مانند اپنے مرکز ثقل مین
موجود ہونیکی حالت مین سمت مذکورہ مین پیدا کرتے
اگر گ۲ اوس لحظہ مرکز ثقل کی سرعت کا جزو منفصلہ محور و ء کے متوازی
ہو تو

$$\text{گ}_2 = \frac{\text{ج}_1 \text{گ}_2 + \text{ج}_2 \text{گ}_2}{\text{ج}_1 + \text{ج}_2}$$

اور اسلئے مرکز ثقل کی حاصل سرعت یا واقعی سرعت $= \sqrt{\text{گ}_1^2 + \text{گ}_2^2}$

(دیکھو حد ۵۴)

(۹۵) دو اجسام کے لئے جو بحث کی گئی ہے وہی دو سے زیادہ کے لئے بھی صحیح ہے پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خواہ اجسام کسیقدر ہون کسی سمت مین اونکے قوا سے حرکت کی اجزاء منفصلہ کا حاصلجمع اوسیقدر ہے جیسا کہ وہ تمام اجسام باہم ہوکر اپنے مرکز ثقل مین ایک ذرہ کیطرح موجود ہونیکی حالت مین سمت مذکور مین پیدا کرتی ہ اور یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر وے سب اجسام سرعت یکسان سے متحرک ہون تو انکا مرکز ثقل بھی سرعت یکسان سے حرکت کرتا رہیگا - کیونکہ مساوات مذکورہ حد بالا مین گ اور گَ بمقدار مستقل ہین اسلئے گ اور گَ بھی مقادیر مستقل ہوگئے - اور اگر اجسام کے سرعت یکسان نہو تو اونکی مرکز ثقل کی حرکت یعنے گ اور گَ صرف ایک لحظہ معینہ کے لئے درست ہوگی اور اس لحظہ کے بعد مختلف ہو جائیگی (دیکھو حد ۱۳)

(۹۶) اگر اجسام اسراع یکسان سے حرکت کرین تو بیان مذکورہ بالا سے اونکے مرکز ثقل کا اسراع بھی دریافت ہوسکتا ہے - مثلاً فرض کرو کہ عَ۱ و عَ۲ و عَ۳ و عَ۴ جداگانہ کسی محور مین دو اجسام کے اسراع کے اجزاء منفصلہ کو تعبیر کرتے ہین تو ابتدا مین دونون محور سے اونکے مرکز ثقل کا فاصلہ ل =

$$ل = \frac{ج_۱ م_۱ + ج_۲ م_۲}{ج_۱ + ج_۲}$$

اور س وقت کے بعد اُسکا فاصلہ لَ

$$= \frac{ج_1(م_1+\frac{1}{2}ع_1 س^2)+ج_2(م_2+\frac{1}{2}عَ_2 س^2)}{ج_1+ج_2}$$

اسلئے وقت س مین محور و لَ کے متوازی سمت مین مرکز ثقل کا فاصلہ طے شدہ =

$$لَ - ل = \frac{1}{2} \times \frac{ج_1 ع_1 + ج_2 عَ}{ج_1 + ج_2} \times س^2$$

اس مساوات سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر محور و لَ کے متوازی سمت مین مرکز ثقل کے اسراع کا جزو منفصلہ $عَ_1$ سے تعبیر ہو تو $ع_1 = \frac{ج_1 ع_1 + ج_2 ع_2}{ج_1 + ج_2}$

مگر $ج_1 \times ع_1$ وغیرہ محور و لَ کے متوازی سمت مین اجسام کی قوت اسراع کی اجزا منفصلہ ہین اسلئے یہ ثابت ہوتا ہے کہ کسی محور مین اجسام کے قوت اسراع کی جزو منفصلہ کا حاصل جمع اُسیقدر ہے جیسا کہ اُن تمام اجسام کے باہم ہو کر مرکز ثقل پر ذرہ کی طرح موجود ہونے سے پیدا ہوتا۔ دو سے زیادہ اجسام کے لئے بھی یہی بیان راست آسکتا ہے ✦

(۹۷) واضح ہو کہ جسم ذرون کا مجموعہ ہے اسلئے کسی ایک جسم کے ہر ایک ذرہ کو علحدہ علحدہ جسم فرض کرکے مساوات متذکرہ بالا سے اُسکے مرکز ثقل کی حرکت دریافت ہو سکتی ہے ✦

(۹۸) جب کسی متحرک جسم پر کوئی طاقت بیرونی یا طاقتہائے بیرونی کا حاصل عمل کرتا ہے تو ہم نے دیکھا ہے کہ اُسکے نتیجہ مین اسراع پیدا ہوتا ہے کہ جسکا مقدار اُس طاقت کے مقدار کے متناسب ہے کیونکہ حرکت کے تیسرے قانون سے

سے ظاہر ہے کہ جسم کے اندرونی ذروں کے فعل فعالی اور فعل انفعالی مقدار مین مساوی اور سمت مین مخالف ہین اسلئے یہ باہمی عمل بیرونی طاقت کے نتیجہ پر کچھ اثر نہین کرتا ہے اسلئے جب بیرونی طاقت یا طاقتون کے عمل سے کسی جسم کی حرکت کا حال کسی اقلہ معین مین دریافت کرنا ضرور ہوتا ہے تو ہم فرض کر سکتے ہین کہ کسی سمت مین اُس طاقت بیرونی کا جزو منفصلہ اُسی سمت مین جسم مذکورہ کی قوت اسراع پیدا شدہ کے مساوی ہے یعنے اگر کوئی طاقت جو کہ قوت اسراع کے جزو مذکورہ کے پیدا کرنے کے لئے کافی ہے سمت مخالف مین جسم پر لگایا جائے تو جسم کی حرکت کی جزو منفصلہ اُس سمت مین زائل ہو جائیگی علامت جبریہ سے یہ نتیجہ حسب ذیل بیان کیا جاتا ہے ❊

فرض کرو کہ کسی لحظہ مین محور و لی اور و ع کے متوازی سمت مین بیرونی طاقت عاملہ (یا طاقتہائے عاملہ کے حاصل) کے اجزاء منفصلہ جدا گانہ طل اور طع ہے اور اُنکے اسراعہائے پیدا شدہ کی اجزاء منفصلہ عل اور عع سے تعبیر ہین تو اُس لحظہ مین جسم کی حرکت کو دریافت کرنے کے لئے حسب ذیل مساوات کافی ہین -

یعنے طل ــ ج عل = صفر

اور طع ــ ج عع = صفر

اگر جسم ایک سے زیادہ ہون تو مساوات بالا اُنکے مرکز ثقل کے دریافت کرنے کے لئے مفید ہونگی مگر اُس حالت مین ج کو اجسام کا مجموعہ ماننا چاہئے ❊

(۹۹) مساوات مذکورہ بالا جنسے کہ جسم کی حرکت پوری پوری دریافت ہوتی ہے حرکت کے تیسرے قانون کے ذریعہ سے ثابت کی گئی ہے لیکن ڈیلیم بارٹ

صاحب نے اسکو سب سے پہلے ایجاد کیا تہا اسلئے یہ مساواتین اُنہین کے نام سے مشہور ہین ✣

(۱۰۰) حد ۸۵ و ۸۶ سے ثابت کیا گیا ہے کہ اجسام پر بیرونی طاقت کا عمل ویسا ہی ہوتا ہے جیساکہ وہ اجسام اپنے مرکز ثقل پر موجود ہون اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر کوئی بیرونی طاقت عمل نکرے یعنے جہان اجسام کے اندرونی فعل انفعالی اور فعل انفعالی کے سوائے اور کوئی عامل اُنپر موجود نہو تو اس حالت مین انکے مرکز ثقل پر بھی کوئی طاقت عمل نہین کرتے اسلئے وہ مرکز ثقل یا تو حالت سکون مین رہیگا اور اگر متحرک ہو تو سرعت مستوی سے خط مستقیم مین چلتا رہیگا (حرکت کی قانون اوّل پر لحاظ کرو) ۔

مثلاً اگر تمام نظام شمسی کے ہر ایک سیاری یعنے آفتاب مہتاب وغیرہ پر خیال کیا جاوے تو معلوم ہوگا کہ اُن سیارون کی کشش باہمی مقدار مین مساوی اور سمت مین مخالف ہے اور ان اندرونی کششون کے سوا اور کوئی بیرونی طاقت اس نظام شمسی پر عمل نہین کرتی ہے کیونکہ اس نظام شمسی کے بہت فاصلہ پر جو کواکب ہین اُنکی کشش بسبب نہایت بعد کے کچھہ نہین ہوسکتی ۔ پس اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ نظام شمسی کا مرکز ثقل جو کہ آفتاب کے اندر واقع ہے یا تو حالت سکون مین ہے اور اگر متحرک ہے تو ایک خط مستقیم مین سرعت یکسان سے حرکت کرتا ہوگا ✣

امثلہ متعلق باب نمبر ۱۰

(۱) ۴ پونڈ اور ۸ پونڈ کے مقدار کے دو اشیا جداگانہ ۸ فٹ اور ۲ فٹ فی سکنڈ کی سرعت سے ایک خط مستقیم مین متحرک ہین اُنکے مرکز ثقل کی حرکت دریافت کرو ✣

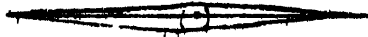
جواب ۴

(۲) دو مساوی مقدار کے اجسام ایک ہی مقام سے دو خطوط مستقیم علی القوائم مین

سرعت م اور ہ سے جداگانہ حرکت کرتے ہین اُنکے مرکز ثقل کی سرعت کیا ہوگی ٭

جواب $\frac{\sqrt{م}}{۲}$

(۳۷) کوئی جسم نیچے گرتے ہوے کسی دوسرے جسم کو جو اُسکے ساتھ رسّی سے بندھا ہوا ہے کھینچ رہا ہے ابتدا مین اونکی سرعت کچھہ نتھی کسی لحظہ معین مین اُنکے مرکز ثقل کی سرعت دریافت کرو اور ثابت کرو کہ وہ مرکز ثقل اسراع مستوی سے ایک خط مستقیم مین حرکت کر رہا ہے ٭

(۳۸) کسی مثلث کے ہر سہ نقاط زوایا سے تین مساوی مقدار کی جسم اضلاع مین علی الترتیب ایسے سرعت مستوی سے متحرک کیے گئے ہین جن سرعتونکا مقدار جداگانہ اضلاع کے مقدار کے متناسب ہے ثابت کرو کہ کسی ضلع کے متوازی سمت مین اجسام کے مرکز ثقل کی سرعت کا جزو منفصلہ مساوی صفر کے ہے اور مرکز ثقل حالت سکون مین ہے ٭

گیارہوان باب

کشش ثقل کا بیان

(۱۰۱) کشش ثقل دنیا مین ہر ایک جگہ اور ہر ایک شئے پر عمل کر رہی ہے اور اسی کے سبب شئے اوپر سے نیچے گرتی ہے اور شئے کے وزن کا سبب بھی یہی ہے - اسلئے اُس کشش کی ماہیت کا بیان کرنا یہان مناسب ہی

(۱۰۲) جب کوئی شئے اوپر سے نیچے کیطرف گرتی ہے تو ایک خط مستقیم مین گرتی ہے جسے خط سمت الراس کہتے ہین - زمین کی کشش ہی اسطرح شئے کے گرنے کا باعث ہے - اور جس خط مین وہ گرے ہے وہ طاقت کشش کی سمت ہے - حکماء نے بہت تجربہ سے ثابت کیا ہے کہ

(ا) ہر ایک شئے زمین کے سب مقامون پر اوس مقام کے خط سمت الراس مین گرتی ہے

(ب) گرنے والی شئے کی حرکت اسراع مستوی سے متبدل ہوتی ہے یعنے بباعث کشش ثقل کے گرنیوالی شئے کا کسی عرصہ مین طے شدہ فاصلہ اسوقت کے مجذور کے متناسب ہی (دیکھو حد ۳۱)

(ط) ہر ایک شئے کے لئے اسراع ایک ہی ہے یعنی شئے کے جسم

کی کمی بیشی سے اس امر کی قیمت مین کمی بیشی واقع نہین ہوتی۔ مثلاً اگر ایک لوہے کا گیند اور کوئی پر کبوتر ایک ہی لحظہ مین ایک ہی بلندی پر سے گرایا جاوے تو دونو ایک لحظہ مین زمین پر پہونچتے ہین۔

(۱۰۳) زمین کی ہوا سے بسبب مزاحمت کے تجارب مذکورہ بالا مین بہت سی اختلاف واقع ہوتے ہین مگر جب آلہ مخرج الہوا کے وسیلہ سے ہوا آلہ سے نکالا جاوے تو یہ تجربے درست ہونگے اور یہ بھی واضح ہو کہ تجارب مذکورہ بالا صرف زمین پر بلندی قلیل کے لئے ہی درست ہین اور نیز شی متحرکہ کے جسم صغیر کے لئے۔ پس یہ تمام تجارب عالم کی کشش ثقل کے قانون کے خاص نتائج ہین نیوٹن صاحب نے اس قانون کو حسب ذیل مروج کیا ہے

"چنانچہ ہر ایک ذرہ دوسرے ذرہ کو اپنی طرف ایک خط مستقیم مین کشش کرتا ہے اور اس طاقت کشش کا مقدار ان دونو ذرون کے جسم کے حاصلضرب سے نسبت راست رکھتا ہے اور ان ہر دو کے بعد کے مجذور سے نسبت معکوس رکھتا ہے یعنے اگر ج اور ج' ان دو ذرون کے جسم کو تعبیر کرین اور ف انکا فاصلہ درمیانی ہو اور ک انکی طاقت کشش باہمی کو تعبیر کرے تو ک $\propto$ $\frac{ج \times ج'}{ف^2}$ "

(۱۰۴) کسی شئے پر کشش ثقل (یعنے کشش زمین) کی دریافت کے لئے اول خیال کرنا چاہئے کہ زمین گول ہے اور یہ ثابت ہوا

ہے کہ کسی گول شیٔ کی کشش کسی بیرونی شئے پر اوسیقدر ہوتی ہے جسقدر کہ وہ کشش کرنیوالی شئے مجتمع ہوکر اپنی مرکز مین ایک ذرہ کے طرح موجود ہونے سے ہوتی اسلئے بیرونی شئے پر زمین کی کشش اسیقدر ہے جیسے کہ تمام زمین اپنی مرکز پر ایک ذرہ کیطرح موجود ہونے سے ہوتی اور اسلئے اس کشش کو کشش مرکز زمین یا کشش ثقل کہتے ہین

فرض کرو کہ زمین کا جسم جَ ہے اور اسکا نصف قطر ر جو قریب مساوی ۴۰۰۰ میل کے ہے اور کسی بیرونی شئے مجذوب کا جسم ج ہے اور زمین سے اُسکی بلندی دَ ہے تو اگر ک اونکی باہمی کشش کو تعبیر کرے تو قانون مذکورہ بالا کے بموجب ک ∝ ج جَ / (ر + د)²

یعنے ک = م × ج جَ / (ر + د)² جہان م مقدار مستقل ہے

(۱۰۵) واضح ہو کہ دَ کا مقدار بہ نسبت ر کے نہایت کم ہے کیونکہ بڑے بلند پہاڑ کی چوٹی بھی ۵ یا ۶ میل سے مرتفع نہین ہوتی اسلئے مساوات مذکورہ بالا سے ثابت ہوتا ہے کہ ج جسم پر زمین کی کشش ثقل

ک = م ج جَ / ر² تقریباً

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ ک کی قیمت شئے مجذوب کے جسم کے تناسب ہے کیونکہ جَ اور ر مقادیر مستقل ہین -

چونکہ شئے پر کشش ثقل کے مقدار کو اُسکا وزن کہتے ہین اسلئے ثابت ہوا کہ کسی شئے کا وزن اُسکے جسم کے متناسب ہے یعنی جسم کے زیادہ

ہونے سے زیادہ اور کم ہونے سے کم ہوتا ہے

(۱۰۶) حرکت کے قانون سوم سے ظاہر ہے کہ زمین جس طاقت سے کسی شئے پر کشش کرتی ہے وہ شئے بھی زمین کو طاقت مساوی سے اپنی طرف کھینچتے ہے

فرض کرو کہ اس کشش باہمی کے سبب سے شئے مجبور، مرکز زمین کیطرف اسراع ع سے متحرک ہے اور مرکز زمین بھی اوس شئے کیطرف اسراع عَ سے متحرک ہے تو

$$ع = \frac{ک}{ج} = \frac{م\,جَ}{ر^{۲}}$$ اور علی ہذا القیاس۔

$$عَ = \frac{ک}{جَ} = \frac{م\,ج}{ر^{۲}}$$ (دیکھو حد ۸۰)

اسلئے مرکز زمین کیطرف اس شئے کا اسراع منتسب (یعنے اگر زمین ساکن رہے اور وہ شئے صرف مرکز زمین کیطرف چلتی تو اوسکا اسراع)

$$= ع + عَ = \frac{م \times (ج + جَ)}{ر^{۲}}$$

واضح ہو کہ زمین پر اگر کسی شئے کا خیال کیا جاے تو معلوم ہوگا کہ بہ نسبت جسم زمین کے اس شئے کا جسم بہت صغیر ہے اسلئے (ج + جَ) قریباً جَ کے مساوی ہے اسلئے مرکز زمین کیطرف ہر شئے کا اسراع = $\frac{م\,جَ}{ر^{۲}}$ جو کہ مقدار مستقل ہے حد (۱۰۲) مین جو تجربہ کا بیان کیا گیا ہے یعنے ہر شئے ایک ہی اسراع سے نیچے گرتی ہے اسکا سبب یہی ہے

(۱۰۷) کشش ثقل سے گرنیوالی شئے کا اسراع مرکز زمین کیطرف

مختلف ذریعون سے معلوم ہو سکتا ہے اونمین سے شاقول اور آلہ ایٹ وڈ صاحب کا اس مطلب کے لئے بہت مفید ہین - ان آلونکا بیان آگے کیا جائیگا - کشش ثقل سے اسراع پیدا شدہ کو ہم ہمیشہ ق سے تعبیر کرینگے

(۱۰۸) زمین جسم کے ہر ایک ذرہ کو اپنے مرکز کیطرف کشش کرتی ہے مگر چونکہ اکثر اجسام کا حجم کم ہوتا ہے اسلئے اوسکے کسی دو ذرون کا درمیانی فاصلہ بہ نسبت مرکز زمین کے فاصلہ کی انسے بہت کم ہوتا ہے اسلئے شئے کے ہر ذرہ پر کشش ثقل قریباً سمت متوازی مین ہوتی ہے اور اسلئے جسم پر حاصل کشش سب ذرونکی کششونکے مجموعہ کے برابر ہوتی ہے مثلاً اگر ایک ذرہ پر کشش ثقل ط ہو تو شئے کے دس ذرونپر کشش ثقل ط کا دس گنا ہوگا اور اسطرح بھی ظاہر ہے کہ ہر ایک شئے پر کشش ثقل کی مقدار اسکے جسم کے متناسب ہوتی ہے

(۱۰۹) علم ہئیت مین یہ بات ثابت ہو چکی ہے کہ زمین بالکل گول نہین ہے بلکہ نارنگی کیطرح دونو قطبون مین کسیقدر دبی ہوئی ہے پس خط استوا مین اسکا نصف قطر طول ہے اور خط استوا کے جنوب یا شمال کیطرف رفتہ رفتہ نصف قطر کم ہوتا جاتا ہے حتےٰ کہ قطبین پر سب سے کم ہے حکیمون نے یہ بھی دریافت کیا ہی کہ خط استوا پر کا نصف قطر قطب کے نصف قطر سے قریب ۱۳ میل کے

زیادہ ہے - اسلیئے مختلف عرضون مین کشش ثقل بھی مختلف ہوتی ہے مگر چونکہ ان ہر دو نصف قطر کا تفاوت بہت کم ہے اسلیے مختلف عرض مین کشش ثقل کی قیمتون مین بہت فرق نہین ہوتا ہے تجربہ سے دریافت ہوا ہے کہ خط استواء پر اسراع کشش ثقل مساوی ۳۲٫۰۸ فٹ فی سکنڈ ہے اور قطب پر ۳۲٫۲۵ اور انگلنڈ مین ۳۲٫۱۹ اور علی ہذا القیاس لیکن جہان بہت دقیق نتیجہ درکار نہین ہوتا وہان اسکی قیمت ۳۲٫۲ یا صرف ۳۲ فرض کرنے سے مطلب حاصل ہو جاتا ہے

(۱۱۰) اس سے پہلے ذکر کیا گیا ہے کہ کشش ثقل ہی شے کے وزن کا باعث ہے جب کوئی شئے سطح مستوی پر رکھی جائے تو اس سطح پر اسکا دباؤ طاقت کشش ثقل کے مساوی ہے اور اس دباؤ کی مقدار کو ہم شئے کا وزن کہتے ہین چنانچہ کسی شئے پر جتنا کشش ثقل کا مقدار ہے وہی اسکے وزن کا مقدار بھی ہے مثلاً اگر جسم ج کا وزن ن ہو تو اسکے یہ معنی ہین کہ ن مقدار کی طاقت ج مقدار کی جسم پر عمل کرکے اس جسم مین اسراع ق پیدا کرنیکے قابل ہے

∴ ن = ج ق × علمی اکائی طاقت. (دیکھو حد ۸۰)

یعنی علمی اکائی طاقت کے ساتھ ناپنے سے ج جسم پر کشش ثقل (یعنی جسم کے وزن کا مقدار) عدد ج × ق سے تعبیر ہوتی ہے - جب کسی شئے کا وزن دریافت کرنیکے لئے مساوات بالا مستعمل ہوتی ہے تو اکائی طاقت علمی کو اکائی وزن کہتے ہین اور ظاہر ہے کہ یہ

اکائی وزن اکائی جسم پر کشش ثقل کا ق حصہ ہے اسکی زیادہ تفصیل نیچے مذکور ہے

علمی اکائی طاقت وہ طاقت ہے جو کہ اکائی جسم پر عمل کر کے اکائی اسراع پیدا کرتی ہے مثلاً اگر ایک سکنڈ اکائی وقت اور ایک فٹ اکائی فاصلہ ہو تو ظاہر ہے کہ اکائی جسم پر کشش ثقل علمی اکائی طاقت کا قریب ۳۲ گنا ہے کیونکہ وہ ۳۲ اکائیں اسراع اسمین پیدا کرتی ہے اس سبب سے اکائی جسم کا وزن علمی اکائی طاقت کا ۳۲ گنا ہے گر جسم ج کا وزن برابر ہے ج گنا اکائی جسم کے وزن کے یعنے برابر ہے ج × ۳۲ × علمی اکائی وزن کے یعنے علمی اکائی وزن کے ساتھ ماپنے سے جسم ج کا وزن عدد ج ق سے تعبیر ہوگا

(۱۱) چونکہ علمی اکائی طاقت برابر ہے $\frac{\text{اکائی جسم کا وزن}}{\text{ق}}$ اسلئے اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اکائی جسم کو مختلف لینے سے علمی اکائی طاقت بھی مختلف ہو جائیگی

واضح ہو کہ بادشاہ ہر ایک ملک مین اکائی جسم کو مقرر کر دیتا ہے تاکہ ہر ایک شخص کے اپنی اپنی رائے سے مختلف اکائی جسم فرض کرنے سے خرید و فروخت مین قباحت پیدا نہو - مثلاً ہندوستان مین ایسا ایک جسم اکائی فرض کر لیا جاتا ہے جسکو سیر کہتے ہین اور بنظر سہولت اس جسم کے وزن کو بھی سیر کہتے ہین

اور انگلستان مین ایسا ایک جسم اکائی فرض کیا جاتا ہے جسکو ایک پونڈ

کہتے ہین اور اُس جسم کا وزن بہی ایک پونڈ کہلاتا ہے

بحث مذکورہ بالا سے علمی اکائی طاقت یا وزن کی نسبت کسی خاص ملک کی مقررہ اکائی وزن کے ساتھ معلوم ہوتے ہے۔ مثلاً ہندوستان مین علمی اکائی طاقت = ایک سیر وزن = قریباً آدہ چہٹانک وزن کے اور انگلنڈ مین علمی اکائی طاقت = ایک پونڈ وزن = آدہ اونس کے۔

واضح ہو کہ عام زبان مین جب ہم ایک پونڈ کسی شئے کے وزن کو کہتے ہین تو علمی وزن سے ماپ کر اُسے ایک پونڈ نہین کہتے ہین کیونکہ حاکم نے جس جسم کو اکائی مقرر کیا ہے اُسکے وزن کو بھی ایک پونڈ مقرر کیا ہے یعنے عام زبان مین اکائی جسم ھی کا وزن اکائی وزن ہے اسطرح عام زبان مین جب ہم کہتے ہین کہ کسی شئے کا وزن ۵ پونڈ ہے تو اُسکا جسم بھی اکائی جسم سے ۵ گنا ہے یعنے عام زبان مین جو مقدار وزن کو تعبیر کرتا ہے وہی اُسکے جسم کو بھی تعبیر کرتا ہے مگر اُسکو اگر ہم علمی اکائی وزن سے ماپتے تو مقدار ق اُسکے ہر ایک اکائی جسم کے وزن کو تعبیر کرتا

(۱۱۴) یہ ذکر ہو چکا ہے کہ زمین کے مختلف عرضون مین نصف قطر کے اختلاف سے کشش ثقل کی قیمت مختلف ہوتی ہے

علاوہ ازین زمین کے گردش محوری بہی اس اختلاف کا ایک بڑا سبب ہے۔ اس کا کچھہ مختصر بیان کرکے ہم اس باب کو تمام کرینگے۔

علم ہیئت مین یہ ثابت ہو چکا ہے کہ زمین اپنے محور پر یکسان طور پر گردش کرتی ہے یعنے ۲۴ گھنٹہ مین ایک دفعہ گھوم آتی ہے اسلئے زمین کے اوپر ہر ایک شئے بھی ۲۴ گھنٹہ مین ایکدفعہ اپنے عرض پر گردش یکسان کرتی ہے اور مختلف عرضون مین اُسکی سرعت گردش مختلف ہوتے ہے

فرض کرو کہ زمین بالکل گول ہے اور اسکا نصف قطر ر ہے اور محور پر سرعت الزاویہ (ک) سے گردش کرتی ہے مقام آ پر جسکا عرض ہ ہے کوئی ایک جسم ج واقع ہے جو کہ بسبب گردش محوری کے ۲۴ گھنٹہ مین یکسان حرکت کرکے ایسا ایک دائرہ بناتا ہے جسکا نصف قطر م آ ہے اور ا م = ر جم ہ

عدد ۸ مین بیان کیا گیا ہے کہ جب کوئی شئے دائرہ مین گردش کرتی ہے تو اسمین ایک اسراع دائرہ کے مرکز کیطرف ہوتا ہے اور اسلئے اس شئے کو دائرہ پر رکھنے کے لئے مخالف سمت مین ایک مساوی طاقت کی ضرورت ہوتی ہے جسے قوت نا ر یہ کہتے ہین یہان اُس سطح زمین کی استقامت جسپر کہ وہ شئے رکھی ہی بجائے طاقت نا ر بہ کے ہے چنانچہ سمت آ د مین اس طاقت کی مقدار

علم ہیئت مین یہ ثابت ہوچکا ہے کہ زمین اپنے محور پر یکسان طور پر گردش کرتی ہے یعنے ۲۴ گھنٹہ مین ایک دفعہ گھوم آتی ہے اسلئے زمین کے اوپر ہر ایک شئے بھی ۲۴ گھنٹہ مین ایکدفعہ اپنے عرض پر گردش یکسان کرتی ہے اور مختلف عرضون مین اُسکی سرعت گردش مختلف ہوتے ہے

فرض کرو کہ زمین بالکل گول ہے اور اسکا نصف قطر ر ہے اور محور پر سرعت الزاویہ (ک) سے گردش کرتی ہے مقام آ پر جسکا عرض ϴ ہے کوی ایک جسم ج واقع ہے جو کہ بسبب گردش محوری کے ۲۴ گھنٹہ مین یکسان حرکت کرکے ایسا ایک دائرہ بناتا ہے جسکا نصف قطر م آ ہے اور ا م = ر جم ϴ

عدد ۸۸ مین بیان کیا گیا ہے کہ جب کوئی شئے دائرہ مین گردش کرتی ہے تو اسمین ایک اسراع دائرہ کے مرکز کیطرف ہوتا ہے اور اسلئے اس شئے کو دائرہ پر رکھنے کے لئے مخالف سمت مین ایک مساوی طاقت کی ضرورت ہوتی ہے جسے قوت ما ربہ کہتے ہین یہان اُس سطح زمین کی استقامت جسپر کہ وہ شئے رکھی ہی بجائے طاقت ما ربہ کے ہے چنانچہ سمت آد مین اس طاقت کی مقدار ر

$\therefore$ ص - ص، = ج ر کہ^۲ جم^۲ θ

اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ کسی شئے کے اصلی وزن اور ظاہری وزن کا فرق اُسکے مقام کے عرض پر منحصر ہے اور عرض زیادہ ہونے سے یہ فرق کم ہوتا ہے اور کم ہونے سے زیادہ

خط استوا پر θ = ۰ اسلئے یہ فرق وہان سب سے زیادہ ہے اور قطبین مین θ = ۹۰ اسلئے یہان یہ فرق سب سے کم ہے

(۱۱۳) چونکہ خط استوا پر θ = ۰ اسلئے وہان ج ق - ج ق = ج ر کہ^۲ یعنے ق - ق = ر کہ^۲

لیکن ر = ۴۰۰۰ میل کے اور کہ = $\frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60}$ فی سکنڈ مین

$\therefore$ خط استوا پر ق - ق = ۱۱۱۶ ء قریباً

لیکن تجربہ سے معلوم ہے کہ خط استوا پر ق یعنے کشش ثقل ظاہری کسی شئے پر = ۹۰۹ ء ۳۲ $\therefore$ وہان اصلی کشش ق = ۰۲۵ ء ۳۲ قریباً

(۱۱۴) زمین کے نصف قطر کے اختلاف اور گردش محوری کے سبب سے مختلف عرضون پر شئے کا وزن ظاہری مختلف ہوتا ہے مگر اصلی وزن اور ظاہری وزن کا فرق ہر جگہ نہایت کم ہوتا ہے واضح ہو کہ اگر یہ فرق زیادہ بھی ہوتا تو عام ترازو یا کانٹے مین یہ فرق دریافت نہین ہوسکتا - کیونکہ ہر دو پلڑونکے اشیاء پر بسبب مذکورہ ایک ہی طرح عمل کرکے اُنکے وزن ظاہری مین ایک ہی قسم کا فرق پیدا کرتا ہے مگر یہ فرق بذریعہ شاقول یا کمانی دار ترازو کے

بخوبی معلوم ہوسکتا ہے اور اسی فرق کے مشاہدہ سے عالمون نے زمین کی گردش محوری و مختلف عرضون مین اوسکے نصف قطر کے اختلاف کی پوری پوری تحقیق کی ہے

مثالات درباب قوانین حرکت و کشش ثقل

(۱) اگر ایک فٹ اکائی فاصلہ فرض کیا جاوے اور اکائی جسم کے وزن کو اکائی طاقت فرض کیا جاوے تو اکائی وقت دریافت کرو

جواب $\frac{1}{\sqrt{32}}$

(۲) کوئی جسم جسکا وزن ایکہزار پونڈ ہے ایسی ایک رسّی سے بندھا ہوا ہے جسکی لنبائی ۱۰۰ سو فٹ ہے اور جوکہ چارسو پچاس پونڈ وزن تک سہار سکتی ہے اگر رسّی کا ایک سرا قائم رکھکر ایک دائرہ مین سرعت یکسان سے گھمایا جاوے تو دریافت کرو کہ کسقدر سرعت کے ساتھ گھمانے سے وہ رسّی ٹوٹ جاویگی

جواب ۳۸۰۶

(۳) خط استوا پر کشش ثقل ۳۲۰۲ ہے ثابت کرو کہ اگر زمین ۲۴ گھنٹہ مین تقریباً ۱۷ دفعہ گردش کرتی تو خط استوا پر شئی کا ظاہری

وزن کچھ نہوتا -

(۴) ایک ریل گاڑی جسکا جسم ۱۲ ، ۷ ٹن ہے ایک ایسے دایرہ مین فی گہنٹہ ۳۰ میل کی سرعت سے متحرک ہی جسکا نصف قطر ۴۶۰ گز ہے طاقت کشش ثقل کو اکائی فرض کرکے ماپنے سے اسکی قوت ماربہ کسقدر ہوگی

جواب ۴۱۳ ، ٹن

(۵) سطح مستوی پر ایک ۱۰ پونڈ کے وزن دار شئے کو رکھکر نیچے کیطرف سرعت ۱۰ آ سے متحرک کیا گیا تو دریافت کرو کہ اوس سطح پر جسم کا دباؤ کسقدر ہوگا

جواب ۱۰ ۱ × (ق - ۱۰)

(۶) کسی شئے پر ۴۰ ق کے مقدار کی طاقت عمل کرکے ۲ سکینڈ مین اوسکو سمت الراس مین ۲ فٹ تک اٹھاتی ہی تو اس شئے کا جسم دریافت کرو   جواب ۴ ق ÷ (ق + ۱) پونڈ

(۷) کوئی طاقت کسی ن پونڈ وزن کے جسم پر ایک سکنڈ عمل کرکے فی سکنڈ ف فٹ کے حساب سرعت پیدا کرتی ہے تو دریافت کرو کہ وہ طاقت کتنا وزن سہار سکتی ہے

جواب ن ف ÷ ق

(۸) کوئی ایک طاقت جو کہ چار پونڈ وزن سنہار سکتی ہے سطح افقی ہموار پر ن پونڈ جسم کو کہینچ رہی ہے تو ۳۹ فٹ پہنچے

مین اسکا کتنا وقت صرف ہوگا اور اسکے انجام مین اسکی سرعت محصلہ کیا ہوگی ۔ جواب اول $\frac{۲۱}{۲ق}$ دوم $\frac{۱۴}{\frac{۱}{۳}ق}$

(۹) دریافت کرو کہ ایک اونس کی طاقت ایک پونڈ کے جسم پر عمل کرکے آدہے سکنڈ مین کتنا فاصلہ طے کرائیگی

جواب ۳ انچ

(۱۰) کسی سطح پر ایک ۸ پونڈ کا جسم رکہکر اُس سطح کو فی سکنڈ فٹ ۱۲ کے اسراع کے حساب سے سمت الراس مین اٹہایا جاتا ہے تو اُس سطح پر شئے کا دباؤ دریافت کرو

جواب ۸ (۱۲ + ق)

(۱۱) اگر دو فٹ فاصلہ اکائی فاصلہ ہو اور اکائے جسم کا وزن اکائی وزن ہو تو مساوات ن = ج ق مین اکائی وقت کیا ہونا چاہیئے جواب $\frac{۱}{۴}$ ایک سکنڈ کا

(۱۲) کسی جسم کو ایسے ایک دائرہ مین جسکا نصف قطرہ فٹ ہے اسطح یکسان طور پر گہمایا جاتا ہے کہ وہ ۵ سکنڈ مین ایک مرتبہ گہوم آتا ہے تو طاقت جاذبہ اسپر کیا ہوگی

جواب $\frac{۴}{۵}$ ۲ط

(۱۳) ایک پونڈ جسم دو گز لمبی رسّی کے ایک سرے سے باندہ کر اور دوسرے سرے کو قائم رکہکر سطح افقیہ مین گہمایا جاتا ہے رسّی کی کشش ۴ پونڈ وزن کے برابر ہے دریافت کرو کہ جسم کے ایکدفعہ

گہونمی مین کتنا وقت صرف ہوگا   جواب ۲ π √۲ سکنڈ

(۱۴) کسی رسّی کے ہر دو سرونسے جداگانہ ج اور جَ دو جسموں کو
باندہ کر سطح مستوی پر اسطرح گھمایا گیا ہے کہ وہ دونو جسم دوائرون
مین متحرک ہین اوس رسّی کا کونسا نقطہ حالت سکون مین ہوگا

جواب اجسام کا مرکز ثقل

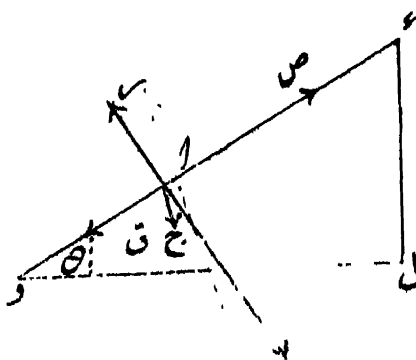
(۱۵) پ پونڈ جسم کو ایک ل فٹ لمبی رسّی کے ایک سرے مین
باندہ کر اوسکے دوسرے سرے کو قائم رکھکر سطح افقی پر یکسان
گھمایا جاتا ہے وہ رسّی صرف جَ پونڈ وزن سہار سکتی ہے تو
دریافت کرو کہ جسم ج کی سرعت کہانتک زیادہ سے زیادہ
ہوسکتی ہے جس سے رسّی ٹوٹ نجائے

جواب √(جَ ل / ج)

بارھوان باب

سطح مائل پر حرکت کے بیان مین

(۱۱۵) تعریف - جب کوئی سطح سطح افقی سے کوئی زاویہ بنائے
تو اسے سطح مائل کہتے ہین اور جو زاویہ یہ اوس سے بناتی ہے اسے
سطح مائل کا میلان کہتے ہین

(۱۱۶) یہ ظاہر ہے کہ جب کسی سطح مائل پر کوئی شئے بسبب کشش ثقل
کے متحرک ہے تو اسکی
حرکت اُس سطح راس
مین ہوگی جو کہ سطح مائل
اور سطح افقی ہر دو پر
عمود ہو۔ اس شکل مین
و ا سطح مائل پر شئے کا
خط تحریک ہے و ل سطح
زمین ہے اور ء ل سطح مائل کی بلندی ہے اور θ اوسکا میلان
مقام ۱ پر کسی جسم ج پر کشش ثقل یعنے اُسکا وزن ج ق
نیچلی طرف عمل کر رہی ہے - اگر اس طاقت کو خط و ا اور سطح

سے خط عمودی مین منفصل کیا جاسے تو معلوم ہوگا کہ ع ا کی سمت مین جزو منفصلہ سطح مایل پر شئے کی حرکت مین کچھ اثر پیدا نہین کرتا بلکہ سطح کی فعل انفعالی سے زایل ہوجاتا ہے اور خط ا و کی سمت کا جزو منفصلہ یعنی ج ق × جب ہ اسراع پیدا کرتا ہے اسلئے اگر سطح بالکل ہموار ہو تو ا و کی سمت مین شئے کا اسراع = ہے ق × جب ہ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ سطح مایل پر کسی ذرہ کی حرکت کے دریافت کرنیکے لئے باب سیوم کی حدود مین اسراع یکسان کی بابت جو قاعدے ثابت کئے گئے ہین وہی عمل مین آئینگے - صرف ان حدود مین اسراع کی علامت کی جگہ ق جب ہ کو رکھنا چاہئے ٭

اگر سطح مایل ہموار نہ ہو تو اسکی تحلیک (ط) شئے کی حرکت کے برخلاف سمت مین عمل کریگی اور اگر سطح کی استقامت مساوی ص کے ہو تو تجربہ سے معلوم ہے کہ ط = لا ص جہان لا ایک مقدار مستقل ہو

اسلئے ط = لا ج ق جم ہ (دیکھو علم سکون)

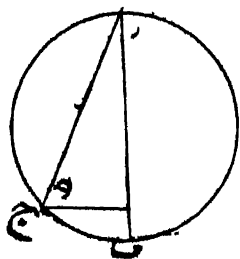
اسلئے اگر شئے کی حرکت سمت آ و مین ہو تو اس پر اسراع پیدا کرنیوالی طاقت = ہے ج ق جب ہ - لا ج ق جم ہ

اور اس طاقت سے جو اسراع پیدا ہوتا ہے وہ = ق (جب ہ - لا جم ہ)

اگر سمت حرکت آ ع ہو تو شئے کا اسراع = ق (جب ہ + لا جم ہ)

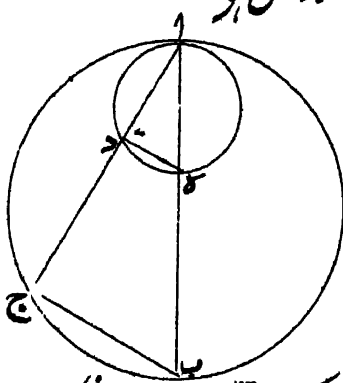
واضح ہو کہ اس اسراع کی قیمت ہر حالت مین ق سے کم ہے

(۱۱۷) فرض کرو کہ کوئی شئے نقطہ ق سے حالت سکون سے شروع کر

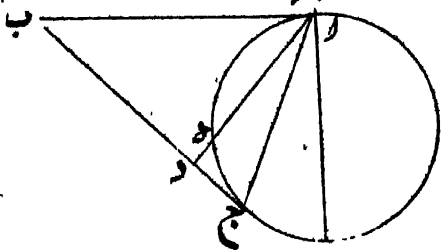
سطح مائل پر پھسلتی ہے جبکہ وہ نقطہ ل پر آئیگی تو اُس لحظہ مین اُسکی سرعت محصلہ = √(۲ ق جب ہ × وء) = √(۲ ق ع ل) لیکن اگر وہ شے نقطہ ء سے خط سمت الراس مین گرتی تو مقام ل پر اُسکی سرعت محصلہ یہی ہوتی (دیکھو حد ۳۲) پس اِس سے ظاہر ہوتا ہے کہ سطح مائل کے راس سے کسی پھسلتی والی شے کی کسی مقام تک آنے مین وہی سرعت محصلہ ہوتی ہے جو راس سے سمت الراس مین گر کر سطح افقی تک پہونچنے مین حاصل ہوتی ہے جو کہ اُس مقام سے گذرتی ہے

(۱۱۸) سطح راس کے کسی دایرہ کے نقطہ اعلی سے کسی وتر مین گذرنی والی شئے کا وقت حرکت مستقل ہوتا ہے اور اُسکی قطر راس کے گرنیمین جو وقت صرف ہوتا ہے اُسکے مساوی ہوتا ہے

فرض کرو کہ اب دایرہ کا قطر سمت الراس ہے اور اج کوئی وتر ہے جسکی سطح افقی سے میلان ہ ہے اِس وتر مین شئے کی حرکت ویسی ہوتی ہے جیسی کہ سطح مائل مین اِسلئے اج کی طرف اُس کا اسراع = ق جب ہ لیکن چونکہ زاویہ اج ب قائمہ ہے اِسلئے زاویہ اب ج = ہ اور بموجب حد ۱۱۵ وتر اج پر شئے کے گرنیکا وقت = √(۲ اج / ق جب ہ) = √(۲ اج / ق (اج/اب)) = √(۲ اب / ق) = قطر اب پر شئے کی گرنیکے وقت۔ جو کہ ایک مقدار مستقل ہے

اسیطرح ثابت ہوسکتا ہے کہ دایرہ کے نقطہ اسفل سے گذرتی ہوئے قطر پر کسی شی کا وقت حرکت مقدار مستقل ہی

(۱۱۹) جب سطح راس مین دو دایرہ نقطہ اعلی مین اندر کی طرف مس کرین تو اس نقطہ سے گذرتی ہوئی کسی وتر کے اس حصہ پر جو ہر دو دایرہ کے درمیان ہے گرنیوالی شیٔ کا وقت حرکت مستقل ہوتا ہے شکل مندرجہ صدر بالا سے معلوم ہوگا کہ شی کا وقت حرکت دج پر = وقت حرکت اج پر - وقت حرکت اد پر = وقت حرکت اب پر - وقت حرکت اہ پر = وقت حرکت ہ ب پر جو کہ ایک مقدار مستقل ہی +

اسی طرح ثابت ہوسکتا ہی کہ نقطہ اسفل سے گذرتی ہوئی کسی وتر کے اس حصہ پر جو دایرون کے درمیان واقع ہے شئے کے گرنیکا وقت مستقل ہی +

(۱۲۰) دعوی متذکرہ بالا کی مدد سے سطح راس مین شی کا خط سریع النزول بعض حالتون مین دریافت ہوسکتا ہی اسکی کئی ایک مثالین ذیل مین درج ہین +

(۱) کسی سطح راس مین کوئی نقطہ ا اور کوئی ایک خط ب ج ہے نقطہ ا سے

خط ب ج تک ایک ایسا خط کھینچو کہ جسمین ایک ذرہ وقت اقل
مین اُس خط پر پہونچ سکے ٭

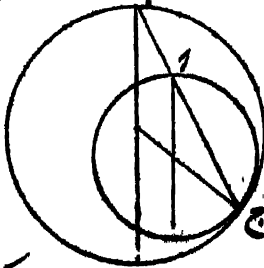
ایک ایسا دایرہ کھینچو کہ جسکا نقطہ اعلیٰ ا ہو اور جو کہ ج ب خط کو پھر کسی
نقطہ ج مین مس کرے تو ا ج خط مطلوب ہوگا کیونکہ اگر نقطہ ا سے خط
ب ج تک اور کوئی خط مثلاً ا د کھینچا جاوے تو وہ دایرہ کو کسی نقطہ
ہ پر قطع کریگا تو ا ہ پر ذرہ کے گرنیکا وقت = ا ج پر گرنیکے
وقت کے برابر اور ا د پر گرنے کا وقت ا ہ پر گرنیکے وقت سے زیادہ ہے
اسلئے ا ج پر گرنیکے وقت سے بھی زیادہ ہے اور اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے
کہ اگر نقطہ ا سے خط ج ب تک کوئی اور خط کھینچا جاوے تو اسپر ذرہ
کے گرنیکا وقت ا ج پر گرنیکے وقت سے زیادہ ہوگا ٭

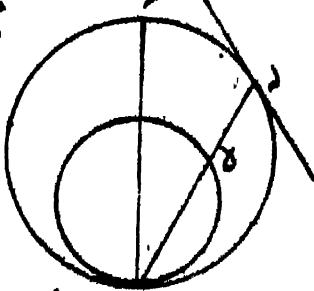
(ب) کسی خط معین سے کسی نقطہ معین تک خط سریع النزول دریافت کرو
ایک ایسا دایرہ کھینچو کہ جسکا نقطہ اسفل نقطہ معین ہو اور جو خط معین کو بھی
مس کرے تو نقطہ تماس اور نقطہ معین کے ملانے سے جو خط بنتا ہے
وہی مطلوب ہوگا اس کا ثبوت حصہ ۱۰ کے بموجب ہے ٭

(ج) کسی دایرہ کے نقطہ بیرونی سے اُس دایرہ تک خط سریع النزول
دریافت کرو نقطہ معین اور دایرہ کے نقطہ اسفل کو وصل کرو تو جو خط
کہ ان نقاط کے ملانے سے پیدا ہوگا
اسکا جسقدر حصہ دایرہ سے باہر
واقع ہے وہی خط مطلوب ہے ثبوت حصہ ۱۰ کے بموجب ہے

(د) کسی دایرہ کے محیط سے کسی معین نقطہ بیرونی تک خط سریع النزول
دریافت کرو ۔

دایرہ کے نقطہ اعلی اور نقطہ معین کو ملانے سے جو خط پیدا ہوتا ہی
اُس کا جس قدر حصہ اُس دایرہ کی باہر واقع ہی وہی خط مطلوب ہوگا
یہ بھی ۱۱۸ حد کے بموجب ثابت ہو سکتا ہی ۔

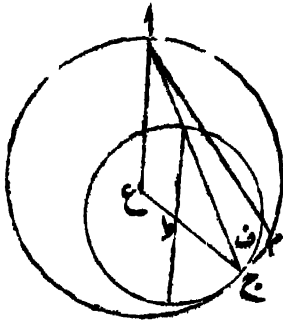
(ہ) کسی دایرہ کی اندرونی نقطہ معین ا سے اُس دایرہ کی محیط تک خط
سریع النزول دریافت کرو ۔

ایک ایسا دایرہ کھینچو جس کا
نقطہ اعلے ا ہو اور جو دایرہ معین
کو کسی نقطہ ج مین مس بھی کرے
یا یہ کھو کہ دایرہ معین کی نقطہ اعلے ب سے نقطہ ا کو ملاؤ اور خط وصل کنندہ
کو محیط دایرہ تک بڑھاؤ تو اج خط مطلوب ہوگا ۔ دیکھو حد ۱۱۸

(و) کسی دایرہ کی بیرونی کسی خط سے اُس دایرہ کی محیط تک خط سریع النزول
دریافت کرو ایک ایسا دایرہ
کھینچو جو کہ دایرہ معین کو نقطہ
اسفل ج مین اور خط معین
کو کسی نقطہ د پر مس کرے فرض
کرو کہ خط د ج دایرہ کو نقطہ ہ پر قطع کرتا ہی تو د ہ خط مطلوب
ہی ۔

اسکے ثبوت کے لئے یاد رکھنا چاہئے کہ شکل مندرجہ شاخ (ج)
مین ثابت ہو چکا ہے کہ خط مطلوب ضرور نقطہ ج سے گزریگا اور
بموجب حد ۱۱۹ کے خط اوب سے دایرہ کے محیط تک خط سریع النزول
د ہ ہوگا۔

(ز) کسی دایرہ معین کے محیط سے کسی اور دایرہ اندرونی کے محیط
تک خط سریع النزول دریافت کرو

دونون دوایر کے نقاط اتصل کو ملا کر خط حاصل کنندہ کو بڑھا دو تو اس خط کا جو
حصہ ہر دو دوایر کے مابین واقع ہے وہی خط مطلوب ہوگا۔
اس کا ثبوت مثل ثبوت بالا کے ہے۔

ہمنے اشکال مندرجہ بالا مین سطح راس کو جسم کی سطح حرکت فرض کیا ہے
اگر ذرہ کی سطح حرکت سطح مائل ہو تو بھی بیان مندرجہ بالا درست
ہوگا صرف ایسی حالت مین سطح مائل پر حرکت کے سبب سے اسرع
کشش ثقل کو ق جب ہ لینا چاہئے جہانکہ ہ سطح مائل کا میلان
ہے۔

حد ۱۱۹ اور ۱۲۰ کی مدد سے سطح راس مین خط بطی النزول بھی بعض حالات
مین دریافت ہو سکتا ہے۔ اسکی ایک مثال نیچے لکھی جاتی ہے۔
فرض کرو کہ ب ہ ج کوئی دایرہ جسکا مرکز ط ہے اور و ایک نقطہ
ہے جو کہ دایرہ کے نقطہ راس سے اوپر واقع ہے تو نقطہ
و سے دایرہ تک خط بطی النزول دریافت کرو

وب خط کو دائرہ کے محیط ج تک بڑھاؤ

تو خط اج خط مطلوب ہوگا

فرض کرو کہ اع خط راس ہے اور خط ج ط اُسکو نقطہ ع پر
قطع کرتا ہے ۔ تو ظاہر ہوگا کہ اع = ج ع اسلئے ایک دائرہ
جسکا مرکز ع ہے اور نصف قطر ع ج ہے دائرہ ب ج د کو نقطہ
ج پر مس کریگا اور دوا وس کا نقطہ راس ہوگا وف ہ ۔ کوئی خط کھینچو
پس معلوم ہوگا کہ خط اج پر کسی ذرہ کے وقت حرکت خط اہ
پر اُسکی وقت حرکت کے برابر ہے اور چونکہ یہ وقت خط وف پر
وقت حرکت سے زیادہ ہے اسلئے اج پر وقت حرکت بھی اف پر وقت
حرکت سے زیادہ ہے ۔ پس ثابت ہوا کہ نقطہ ا سے دائرہ
ب ج د تک جو خطوط کھینچے جاویں اُن میں خط اج پر کسی ذرہ
کے حرکت سب سے جلدی ہوتی ہے ۔ اِسلئے خط اج خط اقل النزول
ہے ۔

دو ہموار سطح مائل راس پر ملی ہوئی ہیں

ان مین نقاط ط اور طَ پر دو

جسم ج اور جَ واقع ہین اور

وہ ایک رسّتے سے جڑے ہوئی

ہین جو کہ نقطہ راس پہ ایک پھرکی

کے اوپر سے گذرتی ہے

ب ق ق ک

اون اجسام کی حرکت دریافت کرو

فرض کرو کہ ہر دو سطح مائل سطح افقی سے جداگانہ زاویہ (ہ) اور

(ہَ) بناتی ہین۔

اور وزن اجسام کا ج ق اور جَ ق ہے

چونکہ رسّی جس سے وہ بندھی ہوئی ہین بالکل ملایم اور بغیر سطیق ہے

اسلئے ایک جسم کی کشش دوسرے جسم پر بموجب سیوم قانون حرکت

کی مقدار مین مساوی اور سمت مین مخالف ہی فرض کرو کہ وہ کشش

ش سے تعبیر ہوتی ہی اور چونکہ رسّی ہر وقت تنی ہوئی ہے پس ایک جسم

اپنی سطح پر جسقدر فاصلہ نیچے کی طرف کسی وقت مین گرتا ہے دوسرا

جسم بھی اپنی سطح پر اسی وقت مین اسی قدر فاصلہ اوپر جاتا ہے پس

ہر دو جسم کا اسرع برابر ہے۔

فرض کرو کہ جسم ج نیچے گرتا ہے اور جَ اپنی سطح مین اوپر جاتا ہے

اور ان کا اسرع ع ہے تو ظاہر ہے کہ جسم ج پر اسرع پیدا کرنیوالی طاقت

[illegible] ش اور جسم جَ پر اسرع پیدا کرنیوالی طاقت

= ش - جؔ ق جب هؔ

∴ ع = (جؔ ق جب ه - ش) / ج = (ش - جؔ ق جب هؔ) / ج (دیکھو حد ۸۰)

∴ ع = ((ج جب ه - جؔ جب هؔ) / (ج + جؔ)) × ق ...... (۱)

اور ش = ((جب ه + جب هؔ) ج جؔ × ق) / (ج + جؔ) .... (۲)

مساوات (۱) سے ظاہر ہوتا ہی کہ اسرع ع یکسان ہی اور اگر اجسام کی سرعت ابتدائی معلوم ہو تو اوس کا فاصلہ طی شدہ وقت حرکت اور سرعت محصل وغیرہ باب سیوم کی حدود سے دریافت ہو جاینگے حد مذکورہ کی کئی خاص صورتین بیان کی جاتی ہین ٭

(ا) مساوات اول سے ظاہر ہے کہ اگر ج جب ه = جؔ جب هؔ تو ع برابر صفر کے ہوگا گویا اس حالت مین ہر دو جسم یا تو حالت سکون مین رہینگے یا اگر متحرک ہون تو سرعت یکسان سے متحرک رہینگے

(ب) اگر جؔ جب هؔ بڑا ہو ج جب ه سے تو جسم ج کو اوپر کی طرف کھینچیگا ٭

(ج) اگر جسم ج خط سمت الراس مین نیچے گرکر جسم جؔ کو سطح مایل پر اوپر لانے کی کوشش کرے تو ه = ۹۰° اور ع = ((ج - جؔ جب هؔ) / (ج + جؔ)) ق

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر جؔ جب هؔ > ج سے تو اسرع جؔ کا سطح مایل کے نیچے کی طرف ہوگا ٭

اسکے اوپر ایک چھوٹی سی پھرکی ہی اور اُسکے دَوَر کا محور اور دو چھوٹے
پھرہی پر رکھا ہوا ہے تاکہ پھرکی کی گھومانی مین کچھ طاقت صرف نہ ہو
تا کوی ایک حلقہ ہی جسکو اُس بتلے مین کسی جگہ پیچ کے ذریعہ سے لگا سکتے
ہین اور اُسطرح د ایک پٹی ہی جو پیچ سے اُس بتلے مین کسیجگہ لگ سکتی ہی
اُس پھرکی کے اوپر سے ایک رسّی دونون طرف لٹکتی ہی جسکے ساتھ
دو مساوی وزن کے جسم بندھی ہوئی ہین ۔ اور تجربہ کے تغیر
و تبدل کے لیے کئی چھوٹی چھوٹی وزن اور ایک گھڑی بھی اس آلہ کے ساتھ
ہوتی ہی ۔ اس آلہ کا اصل مدعا کشش ثقل کا دریافت کرتا ہے اور وہ
طریقہ ذیل سے معلوم ہوتا ہے فرض کرو کہ آلہ مین جسم ج ارتفاع
اعلی پر واقع ہے تو چونکہ ج اور جَ برابر ہین اسلئے ابتدا مین اُنمین
کچھ حرکت نہ ہوگی اب اگر جسم ج پر ایک سیخ کی طرح لمبا جسم ر رکھا
جاوے تو جسم ج + ر نیچے کی طرف گرنے لگیگا اور ر کا مقدار جسقدر
کم ہوگا اُسی قدر اُسکا اسراع بھی کم ہوگا کیونکہ $ع = \frac{ر \times ق}{ج + جَ + ر}$ (دیکھو جلد ۱۲۱ شاخ ۵)
جب جسم (ج + ر) حلقہ ہ پر پہونچتا ہے تو جسم ج اُس حلقہ
مین سے گذر جاتا ہے مگر ر اُسکے اوپر اٹک رہتا ہے اِس لحظہ
سے رسّی کی سرون پر ہر دو جسم برابر ہو جاتے ہین اور اسلئے اسراع
کچھ نہین ہوگا ۔ مگر ابتدا سے ہ تک گرتے ہین جسم ج نے جسقدر
سرعت حاصل کی ہی اُسی سرعت سے وہ نیچے کی طرف یکسان طرح
گرتا رہیگا (بموجب اول قانون حرکت) اور آخرش پٹی د پہ آکر ٹھہیر

جائیگا۔ آ سے ۃ تک اور ہ سے د تک فاصلے بلّی کے درجون سے معلوم ہوجائینگے فرض کرو کہ وہ ف اور ف' ہین اور ان فاصلے کے طے کرنے ہین جسقدر وقت گزرے وہ ص اور ص' ہین تو

$$ف = \frac{1}{2} ع ص^{2} = \frac{1}{2} \times \frac{ک_{ا} ق}{۲ج + ک_{ا}} \times ص^{2} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور ہ پر پہونچنے ہین جسم کی سرعت محصلہ = ع ص

$$\therefore ف' = ع ص ص' = \frac{ک_{ا} ق ص ص'}{۲ج + ک_{ا}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) یا (۲) سے ق کی قیمت معلوم ہوجائیگی اور اسی طرح کرہ ارض کے کسی جگہ پر تجربہ کرنے سے کشش ثقل کا مقدار معلوم ہوتا ہے +

(۱۲۳) کشش ثقل کے معلوم کرنیکے سوای امیوڈ صاحب کا آلہ اسبات کیواسطے بھی مفید ہے

(۱) اس آلہ کے تجربہ سے اول قانون حرکت کی تحقیق پوری پوری ہوجاتی ہے مثلاً بحث مندرجہ بالا ہین کہا گیا ہے کہ جب جسم (ج + ک) حلقہ ۃ پر پہونچتا ہے تو ک اس حلقہ پر اٹک رہتا ہے اور بعد ازان جسم ج سرعت یکسان سے نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے۔ اسکی صحت اول قانون حرکت کی صحت پر منحصر ہے۔ پس پیٹی (د) کو مختلف مقامون پر پیچ سے لگانے سے دریافت ہوتا ہے کہ ہ د فاصلہ طے کرنیکا وقت ہمیشہ اس فاصلہ (یعنی ہ د) کے متناسب رہتا ہے گویا اسمین جسم کی سرعت یکسان ہے اور یہ اول قانون حرکت کے صحت کی ایک بڑی پختہ دلیل ہے +

(ب) حد ۸۰ مین ثابت ہوا ہی کہ جب کوئی طاقت ط جسم ج پر عمل
کر کے اسراع ع پیدا کرتی ہے تو ط ∝ ج ع۔ ٹیوڈ صاحب کے آلہ
کے تجربہ سے اس نسبت پر بھی اطمینان ہوتا ہے۔ اس آلہ مین شئے
کا اسراع = $\frac{ر\,ق}{۲ج + ر}$ (دیکھو حد ۲۲)
مگر واضح ہو کہ یہان جسم ر کا وزن ہی اسراع کا باعث ہے اور یہ وزن
جسم (۲ج + ر) پر عمل کر کے اس اسراع کو پیدا کرتا ہے آب اگر آلہ
مین جسم ر کو مختلف لیا جاوے مگر جسم ج کو ایسا بدلتے جائین کہ (۲ج + ر)
ایک ہی رہی تو مشاہدہ سے معلوم ہوگا کہ ہر حالت مین اسراع ع جسم ر
کا متناسب ہی یعنی اس سے ثابت ہوتا ہے کہ کسی جسم مفروضہ متحرک کا
اسراع پیدا شدہ طاقت عاملہ کے متناسب ہی
پھر اگر ر کو مستقل رکھکر صرف جسم (۲ج + ر) کو بدلا جاوے تو مشاہدہ سے
معلوم ہوگا کہ اسراع پیدا شدہ جسم (۲ج + ر) سے نسبت معکوس
رکھتا ہے پس ان ہر دو سے ثابت ہوتا ہے کہ ط ∝ ج ع
(ج) حد ۱۰۱ مین کہا گیا ہے کہ کشش ثقل ایک طاقت مستقل ہی یعنی
جسم پر یہ کشش اسراع یکسان پیدا کرتی ہی۔ ٹیوڈ صاحب کے آلہ سے
اسکی بھی تصحیح ہوجاتی ہے مثلاً اگر حلقہ ہ کو بلے کے مختلف مقامات
پر لگایا جاوے تو مشاہدہ سے معلوم ہوگا کہ فاصلہ ب ہ ہر حالت
مین ص وقت کا متناسب ہوگا اور جسم ج اور ر کو خواہ کسیطرح بدلا
جاوے اس مشاہدہ کی تصحیح مین کچھ فرق نہین آویگا اسلئے جسم

ما پر کشش ثقل جو کہ جسم (۲ ج + ما) کی اسرع کا باعث ہے ضرور ایک طاقت مستقل ہے (دیکھو حد ۳۲) اور مادہ خواہ کسی قسم کا ہو یہی نتیجہ مشاہدہ سے حاصل ہوگا ٭

واضح ہو کہ ہوا کی تحکیک رسّی کے لا سطبقی وغیرہ کے باعث سے مثلاً مذکورہ بالا میں بہت فرق آجاتا ہے اس لئے حکما نے کشش ثقل کی مقدار کے دریافت کے لئے شاقول کے مشاہدہ کو ترجیح دی ہے جس کا بیان باب آئندہ میں ہوگا ٭

مثالات متعلق باب دوازدہم

(۱) کوئی ذرہ کسی ہموار سطح مائل پر پھسلتا ہی اور اُس پر پھسلتے ہوئی جسقدر عرصہ صرف ہوتا ہے کسی دوسری ذرہ کو عرصہ حرکت کا جو سطح مائل کی چوٹی سے سطح راسی نہین گرتا ہے ن گنا ہے تو اُس سطح مائل کا میلان دریافت کرو۔ جواب جا جب ا $(\frac{۱}{ن})$

(۲) ایک سطح مائل پر جسکا زاویہ میلان ۳۰° ہے سرعت ابتدائی ق سے اُسکے ارتفاع کی طرف کوئی ذرہ محذوف ہوا تو ق فٹ طے کرنے مین اُسے کسقدر عرصہ لگے گا۔ جواب ۲ سکنڈ

(۳) کسی سطح مائل کے طول کو ایسے دو حصون پر تقسیم کرو کہ جسمین کوئی ذرہ پھسل کر مساوی وقت مین ہر دو حصون کو طی کرے۔ جواب ۱ : ۳

(۴) کسی سطح مائل کو جسکا طول ل ہے ن حصون مین تقسیم کرو تاکہ کوئی ذرہ پھسلکر ہر ایک حصہ کو مساوی وقت مین طی کرے۔ جواب $\frac{ل}{ن^۲}$، $\frac{۳ل}{ن^۲}$، $\frac{۵ل}{ن^۲}$ .... وغیرہ

(۵) کسی سطح مائل کا طول ل ہے اور ارتفاع م ہے اُسکی چوٹی سے کوئی ذرہ نیچے کی طرف خط راس سے گرایا گیا دریافت کرو کہ اُس چوٹی سے دوسری ذرہ کو کس سرعت ابتدائی سے پھسلایا جاہئے تاکہ ہر دو ذرہ ایک ہی لحظہ مین سطح مستوی پر پہونچین۔ جواب $ق = \frac{ل^۲ - م^۲}{ل \sqrt{۲ ق م}}$

(۶) سطح راس مین کوئی ایک زاویہ ہے اُس کا وہ قطر معلوم کرو کہ جس سے ذرہ کو گرنے مین اُبہی قدر وقت لگے جتنا کہ قطر سمت الراس کے گرنے مین لگتا ہے۔ جواب میلان = ؛

(۷) سطح راس پر دو دایرہ ہین جو کہ ایک دوسرے کو مس کرتی ہین یعنے ایک کا نقطہ اعلی اور دوسرے کا نقطہ اسفل ایک ہی ہے اول پر کوئی نقطہ فرض کر اور نقطہ مماس سے اوسے وصل کرکے دوسرے دایرہ کے محیط تک بڑھا دو تو ثابت کرو کہ اُس خط پر کسی ذرہ کے پہسلنے کا وقت ہر حالت مین مستقل رہے گا۔

(۸) سطح راس پر کسی دایرہ کے نقطہ اعلی آ سے آب کوئی وتر کھینچا گیا ہے اور اُس وتر کو قطر فرض کرکے دوسرا دایرہ بنایا گیا نقطہ ب پر اول دایرہ کا مماس دوسرے دایرہ کو نقطہ ج پر قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ خط ج ب پر کسی ذرہ کے پہسلنے کا وقت مستقل رہے گا۔

(۹) مفصلہ ذیل حالتون مین کسی ذرہ کا خط سریع النزول دریافت کرو۔
(ا) کسی دایرہ کے محیط سے اُسکے اندرونی نقطہ معین تک
(ب) دایرہ کے محیط سے اُسکی کسی بیرونی خط معین تک

(۱۰) کئی ملے جو ایک ہی سطح مین نہین ہین نقطہ راس پر ملاہی ہوئی ہین ایک ہی لحظہ مین ہر ایک ملے مین ایک ذرہ پہسلتا ہے اگر وہ ملے اسطرح رکہی ہوئی ہون کہ وہ ذرے کچھ عرصہ کے بعد ایک ہی سطح مین موجود ہون تو ثابت کرو کہ اسکے بعد ہر لحظہ مین وہ سب ذرے ایک ہی سطح مین موجود

ہونگے اور یہ بھی ثابت کرو کہ اُن سب ذرون سے گذرتا ہوا ایک دایرہ
بنایا جا سکتا ہے

(۱۱) ایک جسم جَ سمت الراس مین نیچے گرتے ہوئی دوسرے جسم جَ
کو کھینچتا ہے جو کہ ایسی ایک سطح مائل کے پانون مین رکھا ہوا ہے جسکا طول ل
اور ارتفاع ر ہے اور اوسکے ساتھ رسی سے بندھا ہوا ہے اور
اُس سطح مائل کے پانون سے اُسے اوپر کھینچتا ہے تو دریافت
کرو کہ جسم جَ کو سطح مائل پر کسقدر اُٹھنے کے بعد اگر رسی کو کاٹ دیا جاے
تو بھی وہ اُسکی راس تک اُٹھ سکے جواب

$$\frac{(ج + جَ)}{ج} \times \frac{ر ل}{ل + ر}$$

(۱۲) ایک چھرکی پر گذرتی ہوئی رسی کے ہر دو سرون مین ۴ اونس اور
۵ اونس وزن کے دو جسم لٹکے ہوئے ہین - ابتدا سے ۳
سکنڈ کے آخر مین ۵ اونس کا جسم کسقدر نیچے گریگا -

جواب قریباً ۱۶ فٹ

(۱۳) چھرکی کے اوپر سے گذرنیوالی رسی کے دونون سرون سے ۵ اور ۲
پونڈ وزن کے جسم بندھے ہوئے لٹکتے ہین - ابتدا سے ایک سکنڈ کے
بعد اُس رسی کو کاٹ دیا گیا تو دوسرے سکنڈ کے آخر مین ۷ پونڈ کے
جسم کی سرعت کیا ہوگی

جواب $\frac{۲ ق}{۷}$

(۱۴) کسی سطح مستوی پر ایک ۷ پونڈ کا جسم رکھا ہوا ہے اور دوسرا
ایک پونڈ کے وزن کا جسم جو کہ جسم اول کے ساتھ رسی سے بندھا ہوا ہے
سطح کے پاس مین گر کر اُسے کھینچتا ہے تو ۲ سکنڈ مین وہ کتنا فاصلہ طے
کریگا

جواب ق فٹ

(۱۵) سطح افقی پر کسی ۱۰ پونڈ کے جسم پر ۵ پونڈ کی طاقت عمل کرے
کتنے وقت مین ۵۰ فٹ فاصلہ طی کرا ئیگی اور اُس فاصلہ طی کرنے مین
اُس جسم کو کسقدر سرعت حاصل ہوگی - جواب ۱۰ثانیہ اور ۵۰ ف

(۱۶) ایٹوڈ صاحب کے آلہ مین ہر دو بڑے جسم ایک ایک پونڈ کی ہین چھوٹا
طویل جسم $\frac{1}{4}$ اونس کا ہے تو ثابت کرو کہ ابتدا سے ۴ سکنڈ کے انجام مین
جسم کی سرعت محصلہ ہر سکنڈ مین ایک فٹ ہوگی ✦

(۱۷) اگر کوئی ذرہ کسی سطح مائل پر پھسلتا ہے اُس سطح کی بلندی ایک مقدار
مستقل ہے تو ثابت کرو کہ اُسکے پھسلنے کا وقت سطح کے میلان کے
(قم) کے متناسب ہے ✦

(۱۸) کسی سطح راس پر دایرہ کے محیط مین ایسا ایک نقطہ معلوم کرو کہ اُس نقطہ سے
مرکز تک کسی ذرہ کے پھسلنے کا وقت اُس نقطہ سے دائرہ کے نقطہ سفل
تک وتر پر پھسلنے کے وقت کے مساوی ہو

جواب دائرہ کے نقطہ اعلےٰ سی ۶۰° کے فاصلہ پر

(۱۹) سطح راس مین دایرہ کے محیط پر ایک ایسا نقطہ دریافت کرو کہ اگر اوس
نقطہ پر اُس دایرہ کا مماس کھینچکر قطر راس خارجہ سے ملایا جاوے تو اُس مماس پر
کسی ذرہ کے پھسلنے کا وقت اُس قطر پر پھسلنے کے وقت کے مساوی ہو

جواب نقطہ اعلیٰ سی ۱۲۰° کے فاصلہ کو

(۲۰) ایٹوڈ صاحب کے آلہ مین جبکہ اجسام کی عجلت گ کے مساوی ہے
رسی کو کاٹ دیا گیا تو اُسکے بعد عرصہ ص کے آخر مین رسی کے دونون
سرون پر کے اجسام مین فاصلہ دریافت کرو جواب ۲ گ ص

(۲۱) اُسی آلہ مین اگر اجسام کے مجموعہ کو مستقل رکھا جاوے تو ثابت

کیونکہ اسراع کم ہونے سے رسی کی کشش بڑھ جاتی ہے ؛

(۲۲) ۳۰ درجہ کے میلان کی سطح مائل پر ایک جسم ج رکھا ہوا ہے اور ایک دوسرا جسم جَ سطح مائل کی چوٹی پر پھرکی کے گذرتی ہوئی رسی سے بندھا ہوا ہے اور خود سمت راس مین گرکر جسم اول کو سطح مائل کے اوپر کھینچتا ہے اگر سطح مائل پر اُس کا اسراع $\frac{ق}{۴}$ ہو تو ثابت کرو کہ ج اور جَ باہم مساوی ہونگے ؛

(۲۳) مثال بالا مین فرض کرو کہ جس قدر وقت مین جسم جَ جسم ج کو سطح مائل کے پائون سے چوٹی تک کھینچتا ہے اُس سے دوچند وقت مین جسم جَ جسم جَ کو سطح مائل پر اسی قدر کھینچ سکتا ہے تو اجسام کی نسبت کو دریافت کرو۔ جواب ۳ : ۲

(۲۴) ایک رسی کے سرون سے جو کسی سطح مائل کی چوٹی کی پھرکی سے گذرتی ہو ایک طرف سات پونڈ اور دوسری طرف ۴ اور ۵ پونڈ وزن کے دو جسم بندھے ہوئے ہین جبکہ یہ پچھلے جسم ۱۲ فٹ نیچے گر رہے تھے تو ۴ پونڈ کے جسم کو علیحدہ کر لیا گیا تو معلوم کرو کہ باقی ۵ پونڈ کا جسم کس قدر نیچے ہو کر ساکن ہو جائیگا جواب ۹ فٹ

(۲۵) اٹیوڈ صاحب کے آلہ مین اگر پھرکی صرف رسی کی دونون [ان اجسام کے] نصف وزن تک سہار سکے تو ثابت کرو کہ بڑا جسم چھوٹی جسم کے (۲+۳ تا ۲) گنا سے کم نہ ہونا چاہئے

(۲۶) سطح راس مین کسی دائرہ کے محیط سے آگے کسی بیرونی نقطہ تک جو کہ اس دائرہ کے نقطہ اسفل سے نیچے واقع ہو خط بطی التنزول دریافت کرو

جواب نقطہ معین اور دائرہ کے نقطہ اسفل کو ملا کر خط کو محیط تک دراز کرو تو [illegible] مطلوب حاصل ہوگا ؛

(۲۷) کسی دائرہ کے محیط سے بیرونی دائرے تک [illegible] نقطہ اس اول دائرہ

کے نقطہ اسفل سے نیچے واقع ہی خط بطی النزول دریافت کرو ۰

جواب ـ پہلے دایرہ کے نقطہ اسفل اور دوسرے دایرے کی نقطہ راس کے خط وصل کنندہ کو دونو دائیرون تک بڑہاوین تو خط مطلوب حاصل ہوگا ۰

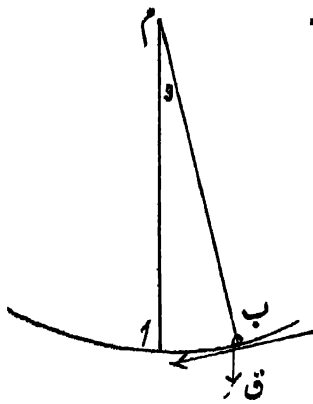
باب تیرہوان

شاقول کے بیان مین

(۱۲۴) شاقول کے باب میں پوری پوری بحث ادنے ریاضی میں نہیں ہوسکتی لہذا ہم صرف اسکی بحث میں صریح صریح باتوں کا ذکر کر کے کفایت کرینگے *

(۱۲۵) شاقول ایک چھوٹا وزن دار گیند ہوتا ہے جو کہ ایک پتلی دھاگہ یا تار کے ایک سرے سے لٹکتا رہتا ہے - اور اُس تار کا دوسرا سرا ایک کیل سے بندھا ہوا ہوتا ہے - جب شاقول ساکن رہتا ہے تو تار سمت راس میں قائم رہتی ہے لیکن اگر اسکو کچھ حرکت دیجاوے تو خط راس کے دونون طرف برابر برابر فاصلوں پر ملتا رہتا ہے - اسکا باعث یہ ہے کہ جب شاقول خط راس کیطرف لوٹ کر آتا ہے اُس وقت اُسکی سرعت محصلہ خط افقی میں ہوتی ہے جو اُسکو خط راس کی دوسری طرف برابر فاصلہ پر لیجاتی ہے - اور اسیطرح اُسکی حرکت خط راس کے دونون طرف جاری رہتی ہے جبتک کہ اُسکو ہوا کی مزاحمت یا تار کی استقامت اور نقطہ بندش پیر کیل پر دباؤ وغیرہ اُسکو پھر ساکن نہین کر دیتا - اگر یہ سب مزاحمتین مذکورہ بالا موجود نہوتین تو ایک دفعہ شاقول کو حرکت دینے سے وہ ہمیشہ حرکت کرتا رہتا *

(۱۲۶) اگر کوئی شاقول خط راس کے ساتھ دو تین درجہ تک کا زاویہ
بنا کر اُس کے دونون طرف ہلتا رہے تو اُس کی ایک جنبش کا
وقت دریافت کرو۔

م
ہ
ا
ب
ق

تعریف۔ جو وقت شاقول کو خط راس کی ایک طرف کے فاصلۂ علیا سے دوسری طرف
کے فاصلۂ علیا تک جانے مین صرف ہوتا ہے اُسکو شاقول کا عرصۂ جنبش کہتے ہین
اور شاقول کے طول سے اُس تار کا طول مراد ہوتا ہے جس سے کہ وہ لٹکایا جاتا ہے
فرض کرو کہ کوئی شاقول (۲) خط راس م ا کے دونون طرف حرکت کرتا ہے اور
کسی لحظہ میں مقام ب پر پہنچا ہے اور فرض کرو کہ زاویہ ا م ب = ہ جو بموجب
دعوے کے دو یا تین درجہ سے زیادہ نہین ہے اور تار ا م کا طول برابر ل کے ہے تو
ظاہر ہوگا کہ ب مقام پر دو طاقتین شاقول پر عمل کر رہی ہین یعنی کشش ثقل اور
کشش تار۔ کشش ثقل (ق) کو دو اجزا مین منفصل کرو۔ ایک نقطہ ب کے
مماس کے سمت مین اور دوسری ب م کی سمت عمود مین۔

اب واضح ہوگا کہ عمود مماس کی سمت کا جزو منفصلہ ق جم θ باعث کشش تار کے زایل ہوجاتا ہے - اور مماس کے سمت کا جزو منفصلہ یعنی شاقول مین اسراع پیدا کرتا ہے ÷

مگر چونکہ زاویہ θ بہت چھوٹا ہے پس قطعہ دائرہ آب نقطہ ب کے مماس کی سمت سا لمحہ منطبق ہوتا ہے اور جب θ = θ اس سے ثابت ہوا کہ شاقول کا اسراع کی سمت ہر لحظہ مین نقطہ آ کے سمت مین ہے اور یہ اسراع = ق جب θ = ف θ = ق/ر × اب اس مساوات سے ظاہر ہوتا ہے کہ شاقول کا اسراع کسی نقطہ یعنی آ سے اُسکے فاصلہ کے متناسب ہے اسلئے اگر شاقول کا عرصہ جنبش س ہو تو بموجب حد ۹۵ کے

$$\frac{ق}{ر} = \left(\frac{\pi}{س}\right)^2 \therefore س = \pi \sqrt{\frac{ر}{ق}}$$

مساوات مذکورہ بالا سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہم زمین کے کسی مقام پر طول کے شاقول کی ایک جنبش کا عرصہ دریافت کرسکین تو اُس مقام کے کشش ثقل کی قیمت دریافت ہوسکتی ہے - مثلاً تجربہ سے معلوم ہوا کہ شہر لنڈن مین شاقول کا طول ۳۹٫۱۳۹۳ انچہ ہے ایک سیکنڈ مین ایک جنبش کرتا ہے - تو بموجب مساوات مذکورہ بالا کے اگر اُس مقام کے کشش ثقل ق سے تعبیر کیجاے تو

$$۱ = \pi \sqrt{\frac{ر}{ق}}$$

$ق = \pi^2 \times ل$ = ۳۸۶٫۲۸ انچہ فی سکنڈ

= ۳۲٫۱۹ فٹ فی سکنڈ

(۱۲۷) جو شاقول ایک سکنڈ مین ایک دفعہ جنبش کرتا ہے اُسکو سکنڈ شاقول کہتے ہیں۔ سکنڈ شاقول کا طول زمین کے مختلف ارتفاعون پر مختلف ہوتا ہے کیونکہ کشش ثقل کی قیمت مختلف ہوتی ہے۔

(۱۲۸) شاقول کے مشاہدہ سے پہاڑ وغیرہ کی اونچائی دریافت ہوسکتی ہے

(مثال)

تجربہ سے معلوم ہو کہ کسی پہاڑ پر سکنڈ شاقول س سکنڈ مین ایک دفعہ جنبش کرتا ہے تو اُس پہاڑ کی اونچائی کیا ہوگی۔

فرض کرو کہ پہاڑ کی اونچائی ف فٹ ہے اور زمین کا نصف قطر ن فٹ ہے اور پہاڑ کے اوپر کشش ثقل کی قیمت قَ ہے۔

$$تو\ 1 = \pi \sqrt{\frac{ل}{ق}}$$

$$س = \pi \sqrt{\frac{ل}{قَ}}$$

$$\therefore \frac{قَ}{ق} = \frac{1}{س^2}$$

$$لیکن\ \frac{قَ}{ق} = \frac{ن^2}{(ن + ف)^2}$$ (دیکھو دفعہ ۱۰۳)

$\therefore$ س $=\frac{ن+ف}{ن}$ یعنی ف $=($س$-1)\times$ن

(۱۲۹) - اگر کسی معین طول کا شاقول کسی عرصہ معین س مین زمین پر د دفعہ جنبش کرے اور کسی پہاڑ کے اوپر دَ دفعہ جنبش کرے تو پہاڑ کی اونچائی دریافت کرو *

اس سوال مین زمین پر شاقول کی ایک جنبش کا عرصہ $=\frac{س}{د}$ اور پہاڑ پر ایک جنبش کا عرصہ $=\frac{س}{دَ}$

$$\therefore \frac{س}{د}=\pi\sqrt{\frac{ما}{ق}}$$

$$\text{و}\ \frac{س}{دَ}=\pi\sqrt{\frac{ما}{قَ}}$$

$$\therefore \frac{د}{دَ}=\sqrt{\frac{ق}{قَ}}=\frac{ن+ف}{ن}=1+\frac{ف}{ن}$$

$$\therefore \frac{د-دَ}{د}=1-\frac{1}{1+\frac{ف}{ن}}=1-\left(1+\frac{ف}{ن}\right)^{-1}$$

$=\frac{ف}{ن}$ تقریبًا کیونکہ ف نہایت کم ہے بمقابلہ ن کے

$$\therefore ف=\frac{د-دَ}{د}\times ن$$

مثال

فرض کرو کہ پہاڑ کی اونچائی ایک میل ہے اور زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل تو سیکنڈ شاقول اس پہاڑ پر ۲۴ گھنٹہ مین سطح زمین کی نسبت کتنی دفعہ کم جنبش کریگا۔

اسجگہہ بموجب مساوات مذکورہ بالا کے

$$\frac{د - دَ}{۲۴ \times ۶۰ \times ۶۰} = \frac{۱}{۴۰۰۰}$$

$$\therefore د - دَ = ۲۱،۶ \text{ تقریباً}$$

یعنے شاقول پہاڑ پر بہ نسبت سطح زمین کے ۲۴ گھنٹہ مین تقریباً ۲۲ دفعہ کم جنبش کرے گا۔

مثالات باب سیزدہم

(۱) دو مقامون پر کشش ثقل کی قیمت ق اور قَ ہے اور ایک شاقول ان مقامون پر ایک عرصہ معین مین د اور دَ دفعہ جدا جدا جنبش کرتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ق - قَ}{ق} = \frac{۲ (د - دَ)}{د} \text{ تقریباً}$$

(۲) ایک شاقول شہر لنڈن مین ۲۴ گھنٹہ کے عرصہ مین ۸۵۹۴۵،۶ دفعہ جنبش کرتا ہے اور وہی شاقول شہر پیرس مین اسی عرصہ مین ۸۵۹۳۳،۸۳ دفعہ جنبش کرتا ہے تو ان دو شہرون مین اکائی جسم کے وزن کا فرق معلوم کرو۔

جواب $\frac{۱}{۳۵۹۰}$

(۳) دو شاقولوں کا طول جداگانہ $ر$ اور $رَ$ ہے جہانکہ $ر$ اور $رَ$ کا فرق بہت کم ہے۔ اور کسی مقام پر اُن کی ایک جنبش کا وقت جداگانہ $\bar{س}$ و $\bar{سَ}$ ہے

تو ثابت کرو کہ $\frac{سَ - س}{س} = \frac{۱}{۲} \times \frac{رَ - ر}{ر}$

(۴) کوئی گھڑی فی ۲۴ گھنٹہ مین بمقدار ۲ منٹ پیچھے ہو جاتی ہے اُسکے شاقول کے نیچے ایک پیچ لگا ہوا ہے جسکے گہمانے سے اُسکا طول کم زیادہ ہو سکتا ہے۔ اُس پیچ کے ایک انچ لنبائی مین ۵۰ بل ہین تو معلوم کرو کہ اُس گھڑی کو درست کرنے کے لئے اُس پیچ کو کتنی دفعہ گہمانا چاہئے۔

فرض کرو کہ اُس مقام پر سیکنڈ شاقول کا طول ۳۹،۲۴ انچہ ہے ٭

جواب ۴،۵

(۵) معلوم ہوا کہ زمین کا جسم چاند کے جسم کی نسبت ۴۹ گنا بڑا ہے اور زمین کا قطر چاند کے قطر کی نسبت ۴ گنا بڑا ہے تو دریافت کرو کہ اگر زمین پر کے ایک سیکنڈ شاقول کو چاند پر لیجاوین تو وہان اُسکی ایک جنبش کا عرصہ کیا ہوگا ٭

جواب $۱\frac{۳}{۴}$ سیکنڈ

(۶) کسی مقام پر ایک سیکنڈ شاقول ۲۴ گھنٹہ مین ۱۲۰ دفعہ زیادہ جنبش کرتا ہے تو اُس مقام پر کشش ثقل کی قیمت دریافت کرو ٭

(۷) کسی مقام پر سیکنڈ شاقول کا طول $ل$ ہے۔ دو اور شاقولون کا طول ($ل - م$) اور ($ل + م$) ہے جہان $م$ کی قیمت بہت کم ہے تو ثابت کرو کہ ۲۴ گھنٹہ مین

ان دو شاقولون کی تعداد جنبش کا مجموعہ

$$= \text{تقریباً}\ ۲ \times ۲۴ \times (۶۰)^۲ \times \left(۱ + \frac{۳م^۲}{۲ل^۴}\right)$$

(۸) معلوم ہوا کہ ایک شاقول کسی مقام پر ایک معین وقت مین $د$ دفعہ جنبش کرتا ہے۔ اور ایک اور مقام پر اُسی عرصہ مین $د_۱$ دفعہ۔ تو ثابت کرو کہ اگر اول مقام پر کوئی رسّی کسی مادہ کے ن مکعب انچون کا وزن سہار سکے تو دوسرے مقام پر وہی رسّی مادہ کے $\frac{ن\,د^۲}{د_۱^۲}$ مکعب انچون کے وزن کو سہار سکے گی *

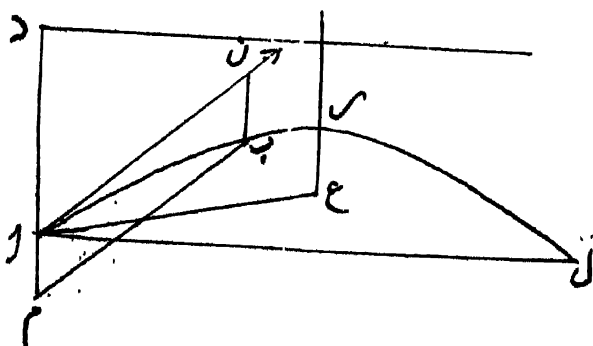
چودھواں باب

مقذوفات کے بیان مین

(۱۳۰) سمت الراس مین مقذوفات کی حرکت کا ذکر مختصر طور پر تیسرے باب مین
ہو چکا ہے اس باب مین عموماً ایسی حالتون کا بیان ہوگا جنمین سمت خذف سطح
افقی کے ساتھ کوئی زاویہ بناتی ہو۔ مقذوفات کی حرکت کا پورا پورا حال
بیان کرنا بہت ادق ہے اور علم کلیات سے تعلق رکھتا ہے کیونکہ اُس مین
مندرجۂ ذیل مقدارہاے غیر معین واقع ہوتے ہین - (۱) مقذوف کی حرکت
محوری (۲) کشش ثقل کا اختلاف جو کہ مقذوف کے ہر لحظہ مختلف ارتفاعون پر پہنچنے
سے واقع ہوتا ہے (۳) مقذوف کے عرصہ حرکت مین زمین کی گردش محوری
وگردش شمسی - (۴) ہوا کی تحکیک جو کہ مقذوف کی سرعت کے مجذور کے متناسب
بڑھتی جاتی ہے وغیرہ +

انمین سے اول تین غیر معین مقدارون کا اثر مقذوف کی حرکت پر بہ نسبت چوتھے
کے کم ہوتا ہے پس اُنکو شمار مین نہ لانے سے کم غلطی واقع ہوگی مگر ہوا کی تحکیک
کا اثر اسقدر زیادہ ہوتا ہے کہ اُسکو حساب مین نہ لانے سے بہت غلطی واقع
ہوگی - ڈاکٹر ہاٹن صاحب اور دیگر حکماء نے بندوق و توپ کے گولہ کی
حرکت کے تجربون سے دریافت کیا ہے کہ ہوا کی تحکیک مقذوف کی سرعت
کے مجذور کے متناسب بدلتی رہتی ہے - پس جب مقذوف کی سرعت بہت زیادہ ہو تو

ہوا کی تحریک بہی بہت زیادہ ہوتی ہے یہانتک کہ مقذوف کا واقعی فاصلہ طے شدہ بہ نسبت قیاسی فاصلہ کے بقدر ۵ ر ۲ یا ۰۶ حصہ کے کم ہوتا ہے - مگر اس مختصر رسالہ مین ایسی ادق باتو نکا حساب نہین ہوسکتا - جبکہ اس باب مین مقذوف کا ذکر آوے تو سمجھنا چاہئیے کہ مقذوف خلا مین حرکت کرتا ہے یعنے ہوا کی تحریک بالکل ناموجود ہے +

(۱۳۱) جب کوئی ذرہ سطح افقی سے کسی میلان کی سمت مین سرعت معین کے ساتھہ مقذوف ہو تو اُسکی حرکت دریافت کرو +

فرض کرو کہ ا ل سطح افقی ہے - کوئی ذرہ نقطہ ا سے سمت ا ن مین سرعت گ کے ساتھہ مقذوف ہوا اب ظاہر ہے کہ ذرہ کی حرکت اُس سطح راس مین ہوگی جو ا ل و ا ن مین سے گذرتی ہے +

واضح ہو کہ ذرہ پر کوئی طاقت سواے کشش ثقل کے عمل نہین کرتی اور بموجب دوسرے قانون حرکت کے طاقت کشش ثقل سرعت ابتداے گ کے اثر مین کچھہ فرق پیدا نہین کرتی +

فرض کرو کہ ص وقت کے انجام مین ذرہ نقطہ پ پر پہنچا ہے

نقطہ ب سے دو خطوط ب ن و ب م متوازی سمت راس و سمت قذف کے کھینچو۔ بموجب دوسرے قانون حرکت کے ہم قیاس کر سکتے ہین کہ ذرہ نے سرعت گ کے ساتھ ص وقت مین ا ن فاصلہ طے کیا اور بباعث کشش ثقل کے اُسی عرصہ مین ن ب فاصلہ نیچے کی طرف گرا ۔

$$\therefore \text{ا ن} = \text{ب م} = \text{گ ص} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{ب ن} = \text{ا م} = \frac{1}{2}\,\text{ق ص}^2 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\therefore \text{ا م} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{ق}}{\text{گ}^2} \times \text{ب م}^2$$

$$\therefore \text{ب م}^2 = \frac{2\,\text{گ}^2}{\text{ق}} \times \text{ا م} \quad \ldots\ldots (3)$$

اگر ا م و ا ن محور فرض کئے جاوین ۔ تو ا م اور ا ن نقطہ ب کے محددین ہونگے ۔

مساوات نمبر ۳ وقت ص پر منحصر نہین ہے۔ یعنی حرکت کے ہر لحظہ کے لئے درست ہے اسلئے یہ مساوات ب کے مقام انتقاط کو تعبیر کرتی ہے۔ علم ہندسہ بالجبر مین ثابت ہے کہ یہ مقام انتقاط ایک خاص خط منحنی ہوتا ہے جسکو پیرابولا* کہتے ہین ۔ اور چونکہ ایسے مقذوفات کی حرکت جو سطح افقی سے کسی میلان پر مقذوف ہون اس خط منحنی مین ہوتی ہے اسواسطے اسکو طریق القذف بھی کہتے ہین۔ علم ہندسہ بالجبر مین یہی

---

* بعض مصنفون نے اپنی کتاب مین اسکا نام قریب البعضوی رکھا ہے ہمنے انگریزی نام ہی استعمال کیا ہے ۔

ثابت ہے کہ مساوات نمبر(۳) سے تعبیر شدہ پیرابولا کا محور خط سمت الراس مین ہوتا ہے اور خط ا م اس پیرابولا کا نقطہ آ سے گذرتا ہوا قطر ہے۔ اور نقطہ ا سے اُسکے نقطہ ماسکہ ع کا فاصلہ مساوی ہے $\frac{گ^2}{م ق}$ کے ٭

(۱۳۲) طریق المقذف کے نقطہ ماسکہ کا مقام حسب ذیل معلوم ہوسکتا ہے۔

فرض کرو کہ سمت قذف کا میلان سطح افقی سے ہ ہے اور زاویہ ل ا ع برابر θ کی ہے۔ تو بموجب اصولات پیرابولا کے ظاہر ہے کہ خط ا آن جو نقطہ آ پر مماس ہے خطوط ا د اور ا ع کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے ٭

$$\therefore \quad ۲(ہ - \theta) + \theta = ۹۰^\circ$$

$$\therefore \quad \theta = ۲ہ - ۹۰^\circ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{اور } ا ع = \frac{گ^2}{۲ ق} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

ان دو مساواتون سے نقطہ ع کا مقام معلوم ہوسکتا ہے۔

واضح ہو کہ اگر ہ بڑا ہو ۴۵° سے تو نقطہ ماسکہ ع سطح افقی ا ل کے نیچے واقع ہوگا ٭

(۱۳۳) مقذوف کا مقام التقاط اور اُسکی حرکت کی تفصیل خط افقی ا ل اور خط الراس ا د کو محور فرض کرنے سے بھی دریافت ہوسکتی ہین ٭

فرض کرو کہ ص وقت کے انجام میں مقذوف مقام ب پر پہنچا ہے نقطہ ب سے ب م عمود ا ل پر کھینچو تو ا م اور ب م نقطہ ب کی محددین ہونگی

فرض کرو کہ $\overline{\text{ام}} = \overline{\text{ل}}$ اور $\overline{\text{بم}} = \overline{\text{د}}$

مقذوف کی سرعت ابتدائی گ کو متوازی $\overline{\text{بم}}$ اور $\overline{\text{ام}}$ کے منفصل کرو تو ظاہر ہے کہ کشش ثقل سمت الراس کی خبر منفصلہ کے مخالف عمل کرتی ہے۔ اور مقذوف کی حرکت $\overline{\text{ال}}$ اور $\overline{\text{اد}}$ کی سمتون مین ایک دوسرے سے بالکل علٰحدہ فرض کیجا سکتی ہے

اسلئے ام = ل = گ جم ہ × ص .... (۱)

بم = د = گ جب ہ × ص − $\frac{1}{2}$ ق ص^2 .... (۲)

∴ د = ل × مس ہ − $\frac{\text{ق ل}^2}{\text{۲ گ}^2\ \text{جب}^2\ \text{ہ}}$ ...... (۳)

مساوات نمبر (۳) مقذوف کی مقام النقاط کو تعبیر کرتی ہے۔ اور مساواتون نمبر (۱) و (۲) سے مقذوف کا مقام کسی معین وقت کے انجام مین دریافت ہوسکتا ہے۔

اگر مقام ب پر مقذوف کی سرعت گَ ہو اور اُسکی سمت محور $\overline{\text{ال}}$ سے زاویہ φ بنادے تو چونکہ مقام ب پر مقذوف کی سرعت کے اجزا منفصلہ متوازی محورون کے جداگانہ

گ جم ہ و گ جب ہ − ق ص ہین،

∴ گَ جم φ = گ جم ہ

و گ' جب φ = گ جب ه − ق ص

∴ گ'۲ = گ۲ − ۲ ق ص گ جب ه + ق۲ ص۲ ...... (۱)

$$\text{و س } \phi = \frac{\text{گ جب ه − ق ص}}{\text{گ جم ه}} \ .... \ (۲)$$

ان دو مساواتون سے مقام جب پر ذرہ کی سرعت اور سمت حرکت دریافت ہو سکتی ہیں اور حصہ ۲ کی مانند ایسے بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ مقذوف کے ارتفاع اعظم پر یعنی پیرابولا کے نقطہ راس تک پہنچنے مین $\frac{\text{گ جب ه}}{\text{ق}}$ وقت صرف ہوگا اور اس مقام کی بلندی سطح افقی سے مساوی $\frac{\text{گ۲ جب۲ ه}}{\text{۲ ق}}$ کے ہے *

(۱۴۳) فرض کرو کہ مقذوف سطح افقی کو نقطہ ل پر قطع کرتا ہے تو فاصلہ ا گ کو سطح افقی پر مقذوف کی وسعت کہتے ہین اور جتنا وقت ابتدا سے قذف کے اس مقام تک پہنچنے مین صرف ہوتا ہے اُسکو مقذوف کا وقت تاخت کہتے ہین فرض کرو کہ مقذوف کی وسعت سطح زمین پر وَ ہے اور وقت تاخت تَ ہے تو بموجب حد مذکورہ بالا کے

و = گ جم ه × ت

اور ۰ = گ جب ه × ت − $\frac{۱}{۲}$ ق ت۲

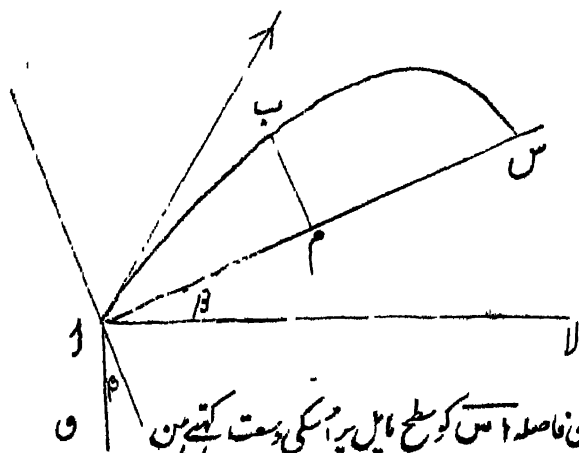
$$\therefore \text{ ت = ۰ یا } = \frac{\text{۲ گ جب ه}}{\text{ق}} \ ...... \ (۱)$$

$$\text{اور و } = \frac{\text{گ جم ه × ۲ گ جب ه}}{\text{ق}} = \frac{\text{گ۲ جب ۲ه}}{\text{ق}} \ .... \ (۲)$$

واقع ہو کر جب مقذوف نقطہ ۲ پر تھا یعنی لحظ قذف مین ف برابر صفر کے تھی کیونکہ اُس مقام پر بھی ہل کی قیمت برابر صفر کے ہے -

مساوات بالا مین و کی قیمت سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر مقذوف کی سرعت قذف مستقیم رہے اور میلان قذف مختلف لیا جاوے تو اس میلان کو ۵ ٤٥ لینے سے و کی قیمت اعظم ہوگی ؛

(۱۳۵) فرض کرو کہ ۲ س ایک سطح مایل ہے جو سطح افقی سے زاویہ ہ بناتی ہے اور کوئی مقذوف اس سطح کے مقام س پر آکر گرا

اسحالت مین فاصلہ ۲ س کو سطح مایل پر اُسکی وسعت کہتے ہین

یہ وسعت اور اسحالت کا وقت تاخت حسب ذیل دریافت ہوتے ہین +

نقطہ ۲ سے سطح مائل پر عمود ۲ د نکالو اور ۲ س اور ۲ د کو محاذ مفروض کرو نیز کسی وقت ص کے انجام مین مقذوف نقطہ ب پر پہنچتا ہے اور ۲ م اور ب م اس نقطہ کی محددین ہین تو اگر مقذوف کی سرعت گ اور اسراع کشش ثقل ق کو تحلیل کرو

کے متوازی منفصل کیا جاتا ہے تو مانند بحث دفعہ ۱۳۳ کے ظاہر ہوگا کہ

۲ م = گ جم (ی – ہ) ص – ½ ق جب ی ص۲ ...... (۱)

اور ب م = گ جب (ی – ہ) ص – ½ ق جم ی ص۲ ... (۲)

پس اگر مقذوف کو نقطہ س پر پہنچنے میں وقت ت صرف ہوا ہو تو

اس = گ جم (ی – ہ) ت – ½ ق جب ی × ت۲

اور ۰ = گ جب (ی – ہ) ت – ½ ق جم ی × ت۲

∴ ت = ۲ گ جب (ی – ہ) / ق جم ی

اور اس = ۲ گ جب (ی – ہ) جم ی / ق جم۲ ہ

(۱۳۶) چونکہ اس = ۲ گ۲ جب (ی – ہ) جم ی / ق جم۲ ہ

$$= \frac{\text{گ}^2}{\text{ق جم}^2\text{ھ}} \times \{\text{جب}(2\text{ط} - \text{ھ}) - \text{جب ھ}\}$$

اسلئے اگر ۲ ط - ھ = ۹۰° یعنی اگر ط = $\frac{۹۰° + ھ}{۲}$ ہو

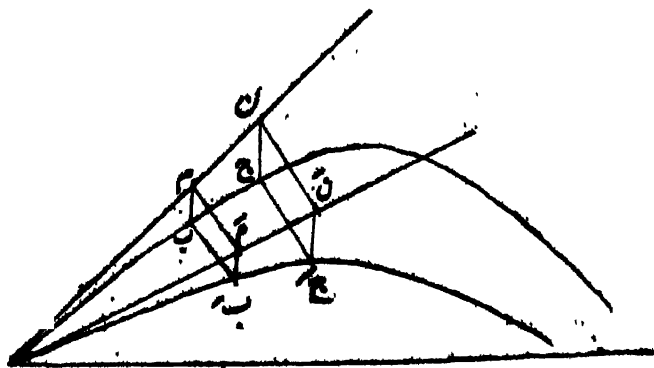
تو ا س کی قیمت اعظم ہوگی اور ا س وسعت اعظم کی قیمت اُس

حالت مین

$$= \frac{\text{گ}^2(1 - \text{جب ھ})}{\text{ق جم}^2\text{ھ}} = \frac{\text{گ}^2}{\text{ق}(1 + \text{جب ھ})}$$

(۱۴۷) جب دو اجسام ایک ہی مقام سے مختلف سرعتون کے ساتھ

مختلف سمتون مایل مین متقذوف ہون تو اُنکا خط وصل کنندہ ہمیشہ اپنے

متوازی رہیگا *

فرض کرو کہ دو اجسام جداگانہ سرعت گ و گَ کے ساتھ مقذوف ہوکے کسی وقت صَ کے

انجام مین نقاط بَ و بَ پر پہونچین

اور وقت صً کے انجام مین نقاط جَ و جَ پر پہنچین

توبموجب قانون دویم حرکت کی ہم فرض کرسکتے ہین کہ مقذوف اوّل نے صَ وقت

مین سرعت گ کے ساتھ سمت قذف مین ا مَ فاصلہ طے کیا اور بہ سبب کشش ثقل

کے فاصلہ م بَ نیچے گرا اور اسطرح مقذوف دویم کی بابت بھی فرض ہوسکتا ہے

$$\therefore \frac{\text{ا م}}{\text{ا ن}} = \frac{\text{گ} \times \text{ص}}{\text{گ} \times \text{صَ}} = \frac{\text{ص}}{\text{صَ}}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{ا مَ}}{\text{ا نَ}} = \frac{\text{گَ} \times \text{ص}}{\text{گَ} \times \text{صَ}} = \frac{\text{ص}}{\text{صَ}}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ م مَ متوازی ن نَ کے ہے

$$\text{اور نیز}\quad \text{م ب} = \tfrac{1}{2}\,\text{ق}\,\text{صَ}^2 = \text{مَ بَ}$$

اسلئے ب بَ متوازی م مَ کے ہے

اسیطرح ثابت ہوسکتا ہے کہ ج جَ متوازی ن نَ کے ہے

اسلئے ب بَ متوازی ج جَ کے ہے

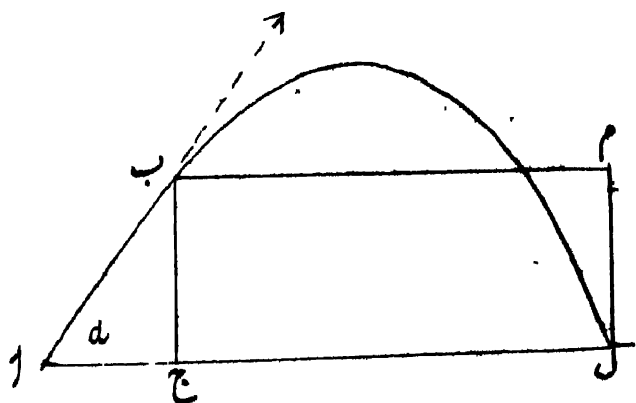
یہی بحث ہر لحظہ کے لئے درست ہوگی۔ پس دعوے ثابت ہوگیا

(۱۳۸) دو مقذوفون کے مرکز ثقل کی حرکت بھی پیرا بولا مین ہوتی ہے

یہ دعوے حدود ۹۴ و ۹۵ و ۱۰۶ و ۹ سے ثابت ہوسکتا ہے کیونکہ حرکت کے دوسرے

قانون سے ظاہر ہے کہ اگر دونون مقذوف صرف اپنی سرعتہاے ابتدائی کے

ساتھ حرکت کرتے تو انکا مرکز ثقل ایک خط مستقیم مین یکسان سرعت کے ساتھ

حرکت کرتا (دیکھو حد ۹۵) اور اگر دونو مقذوف صرف اسراع کشش ثقل ق سے نیچے گرتے تو انکا مرکز ثقل بھی سراع ق سے ایک خط مستقیم مین نیچے گرتا - پس ہم فرض کرسکتے ہین کہ مقذوفون کے مرکز ثقل کی دو حرکتین ایک ہی وقت مین موجود ہین اول سرعت یکسان جو بسبب سرعتہاے قذف کے پیدا ہوتی ہے اور دوسرا اسراع یکسان ق جو بسبب کشش ثقل کے پیدا ہوتا ہے اسلئے حد ۱۳۱ کی مانند اسجگہہ بھی ثابت ہوسکتا ہے کہ مرکز ثقل کی حرکت بیرابولا مین ہوگی *

(۱۳۹) جب کوئی ذرہ سطح مایل پر ایسی سرعت معین سے مقذوف ہوکر سطح مایل کے راس تک پہنچنے کے بعد بھی حرکت کرتا رہے تو اسکی حرکت بعد بین بیرابولا مین ہوگی شکل مذکورہ بالا سے ذرہ کی حرکت کا حال بخوبی واضح ہوجائیگا *

سطح مایل کے راس تک پہنچنے مین ذرہ کی سرعت محصلہ ہوگی اسکو ذرہ کی حرکت بعد کیواسطے سرعت قذف سمجھنی چاہیئے *

اگر ذرہ اس سطح افقی کو جو نقطہ ا مین سے گذرتی ہے مقام ل پر آکر قطع کرے

توبموجب مساوات عدد ۱۳۴ اسکے نقطہ ل کے محددین م ب و م ل دریافت ہوسکتی ہین، مگر یاد رکھنا چاہیئے کہ اسحالت مین ل کا معین ل م مقدار منفی ہوگا کیونکہ وہ محور ب م کے نیچے واقع ہوتا ہے ✦

جب کوئی جسم کسی مینار وغیرہ کی چوٹی سے سمت مائل مین متقذوف ہو تو اسکی حرکت کے دریافت کرنے کے لئے بحث مذکور بالا عمل مین آویگی ✦

تمثیلات باب چہاردہم

(۱) کسی ذرہ کی سرعت کی اجزاء منفصلہ متوازی دو معین محورون کے اسراع یکسان سے بدلتے ہین تو ثابت کرو کہ ذرہ کی حرکت پیرابولا مین ہوگی مگر جب اجزاء منفصلہ اس اسراع کے ہمیشہ متناسب رہین تو اس صورت مین ذرہ کی حرکت خط مستقیم مین ہوگی ✦

(۲) کسی ایک مقام سے دو اجسام ایک ہی سرعت کے ساتھ متقذوف ہوئے اور انکی زویا یا میلان کا مجموعہ برابر ؟ ہ کے ہے تو ثابت کرو کہ ان دونون کی وسعت سطح افقی پر ایک ہی ہوگی ✦

(۳) اگر ایک ہی لحظہ مین ایک ہی مقام سے اور ایک ہی سرعت کے ساتھ کئی ایک اجسام متقذوف ہون تو وے سب اپنی حرکت کے ہر لحظہ مین ایک کرہ کی سطح پر رہینگے ✦

(۴) ایک ہ ہہ کے سطح مائل کے پاؤن سے سرعت گ کے ساتھ کوئی ذرہ اسپر متقذوف ہوا جب ذرہ سطح کے نقطہ راس پر پہونچا تو آسیجہہ اسکی سرعت نصف

کی ہے تہی تو سطح مائل کے نقطہ میل سے اُس نقطہ کا فاصلہ جہان وہ سطح افقی کو آکر قطع کرتا ہے دریافت کرو ٭

جواب $\frac{۱۶ گ^۲}{۲۵ ق}$ فٹ

(۵) ایک سطح مائل کا میلان ہ ہے تو کوئی ذرہ اُس سطح مین کتنے میلان پر متقذوف ہوتا کہ اُسی سطح پر گرنے کے وقت اُسکی سمت حرکت سطح سے زاویہ قائمہ بناوے ٭

جواب مس$^{-۱}$ (½ جم ہ)

(۶) سطح راس مین ایک مثلث واقع ہے جسکا قاعدہ خط افقی مین ہے اور قاعدہ کے زاوئے ح و ط ہین اُسکے قاعدہ کے ایک سرے سے کوئی ذرہ اسطرح سے متقذوف ہو کہ وہ عین اُس مثلث کے نقطہ راس کو مس کر کے قاعدہ کے دوسرے سرے پر جا گرا۔ اگر میلان تقذف ۵ ہو تو ثابت کرو کہ

مس ۵ = مس ح × مس ط

(۷) کوئی ذرہ سرعت ۳ $\overline{ق}$ کے ساتھ ۵ ۴ کے میلان سے متقذوف ہوا تو اُسکی وسعت سطح افقی اپر دریافت کرو ٭

جواب $\frac{۹ ق}{۲}$

(۸) اگر کسی متقذوف کے نقطہ ارتفاع اعظم پر اُسکی سرعت کی مقدار بدل دیجاوے مگر سمت سرعت بدستور رہے تو دریافت کرو کہ آیا اُسکا وقت تاخت مین فرق واقع ہوگا یا نہین ٭

جواب ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ نہین

(۹) دو جسم ایک ہی لحظہ مین کسی نقطہ سے مختلف میلانون پر مختلف سرعتون کے ساتھ مقذوف ہوئی تو کسی وقت معین کے بعد اُنکے درمیان فاصلہ کیا ہوگا +

(۱۰) کسی جہاز مین جسکی سرعت حرکت گ ہے ایک توپ سے میلان α کے ساتھ ایک گولہ سرعت گَ کے ساتھ چلایا گیا جہاز اور گولا ایک ہی سطح راس مین حرکت کرتے ہین - تو گولہ کی وسعت دریافت کرو +

جواب - $\frac{\text{۲ گَ جب } \alpha}{\text{ق}}$ × (گ + گَ جم α)

(۱۱) ثابت کرو کہ کسی °۳۰ کی سطح مائل پر مقذوف کی وسعت سطح افقی پر کی وسعت کے $\frac{2}{3}$ کے برابر ہے +

(۱۲) کوئی جسم جو کہ میلان α کے ساتھ سرعت گ سے مقذوف ہوا ایک دیوار کی چوٹی کو مس کرکے چلا گیا - اُس دیوار کی ارتفاع کا زاویہ مقابل نقطہ قذف کے β ہے تو دریافت کرو کہ مقذوف کو ابتدا سے دیوار کی چوٹی تک پہنچنے مین کتنا وقت صرف ہوا ہوگا -

جواب $\frac{\text{۲ گ جب } (\alpha - \beta)}{\text{ق جم } \beta}$

(۱۳) کسی مینار کی چوٹی سے ایک پتھر معین میلان سے مقذوف ہوا تو سرعت قذف کیا ہونی چاہیئے تا کہ سطح افقی کے ایک نقطہ معین پر آگرے +

(۱۴) دو پتھر ایک ہی لحظہ مین ایک سطح راس مین سرعتون گ و گَ کے ساتھ اور جداگانہ میلان α و β سے مقذوف ہوئے تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{گ × گَ × جب} (\beta - \alpha)}{\text{ق (گ جم } \beta \text{ - گَ جم } \alpha)}$ وقت کے انجام مین اُنکی سمت حرکت ایکدوسرے کے متوازی ہوگی +

(۱۵) کوئی ذرہ میلان α سے مقذوف ہوا تو دریافت کرو کہ کتنے وقت کے انجام میں اسکی سمت حرکت β میلان کی ایک سطح مائل کے ساتھ زاویہ قائمہ بناویگی *

جواب $\frac{۱}{ق} \times$ (مس α ± جم β)

(۱۶) ایک جسم جو سرعت گ کے ساتھ مقذوف ہوا β میلان کی ایک سطح مائل پر جو کہ نقطہ حذف میں سے گذرتی ہے زاویہ قائمہ بناکر گرا تو ثابت کرو کہ سطح زمین سے اُس نقطہ کی بلندی جسپر کہ مقذوف آکر گرا برابر $\frac{۲ گ^۲}{ق} \times \frac{جب^۲ β}{۱ + ۳ جب^۲ β}$ کے ہے

(۱۷) ایک توپ کا گولا سرعت گ سے α میلان کے ساتھ چلا۔ اور بوقت قذف توپ اپنی نالی میں سے گذرتی ہوئی سطح راس کے ساتھ زاویہ β بناکر سرعت گَ سے متحرک تھی تو گولے کی وسعت سطح زمین پر دریافت کرو *

جواب $\frac{۲ گ جب α}{ق}$ ہا $\overline{گَ^۲ + گ^۲ جم^۲ α + ۲ گ گَ جم α \times جم β}$

(۱۸) ایک پتھر اسطرح سے مقذوف ہوا کہ ایک درخت کی چوٹی پر ایک چڑیا کے لگنے کے بعد اتنا اونچا جا سکے کہ اُسکی کل اونچائی سطح افقی سے برابر دو چند اونچائی درخت کے ہو۔ بوقت قذف چڑیا سطح افقی کے متوازی اُوڑ گئی۔ تو ثابت کرو کہ اگر محذوف کی سرعت کا جز منفصلہ متوازی سطح مستوی کی چڑیا کی سرعت کے ساتھ ایسی نسبت رکھے جیسا کہ ۱ + $\overline{۲}$: ۲ تو پتھر چڑیا کو ضرور لگے گا *

(۱۹) کوئی جسم میلان α کے ساتھ سرعت گ سے مقذوف ہوا۔ سطح افقی پر ...

سکے وسعت کے نقطۂ تنصیف سے ایک سطح مائل ط میلان کی گذرتی ہے تو دریافت کرو کہ مقذوف کو ابتدا سے سطح مائل تک پہنچنے میں کتنا وقت لگیگا *

جواب $\frac{\text{گ جب ط}}{\text{ق}} \times \sqrt{\text{ما ۲}}$

(۲۰) د فٹ ارتفاع کے ایک مینار کی چوٹی سے ایک جسم ایسی سرعت سے مقذوف ہوا کہ اگر وہ مینار کی ن گنا اونچائی سے نیچے گرتا تو اُسکی سرعت محصلہ زمین پر پہنچتے وقت برابر سرعت قذف کی ہوتی تو دریافت کرو کہ مقذوف کی وسعت اعظم سطح زمین پر کیا ہوگی۔ اور نیز یہہ بھی ثابت کرو کہ وسعت اعظم حاصل کرنے کے لئے جسم کو ایسے زاویہ میلان سے مقذوف ہونا چاہئے کہ جسکا مس ــ۱ $\sqrt{\frac{\text{ن}}{\text{ن+۱}}}$ کے ہو

جواب ۲ د $\sqrt{\text{ما ن+ن۲}}$

باب پندرھوان

اجسام کے مضاربہ کے بیان مین

(۱۴۰) اس مقام تک ہمنے صرف مستقل طاقتون کے عمل کا ذکر کیا ہے۔ اب ہم اُس تبدیلی کا ذکر کرینگے جو کہ دو متحرک اجسام کے ضرب باہمی سے اُنکی حرکت مین پیدا ہوتی ہے۔ جسطرح کہ ہمنے اگلے بابون مین فرض کیا تھا اُسیطرح ہم اِس باب مین بھی فرض کرینگے کہ اجسام مین کوئی حرکت مدوری واقع نہین ہوگی اور وے خلا مین حرکت کرتے ہین ۔

(۱۴۱) یہ بات عیان ہے کہ جب دو جسم ایکدوسرے کے ساتھ ٹکر کھاتے ہین تو ان دونوکی حرکت مین تبدیلی واقع ہوتی ہے۔ یہہ تبدیلی ضرور کسی طاقت کے عمل سے پیدا ہوئی ہوگی۔ مگر کوئی شے از خود کسی طاقت کی بانی نہین ہے جس قوۃ حرکت کے ساتھ ایک جسم ضرب کے لحظہ مین حرکت کر رہا ہو اُسی قوۃ حرکت کا کوئی جزو تبدیلی مذکورہ بالا کو پیدا کرتا ہے یعنے جتنے قوۃ حرکت بباعث ضرب ایک جسم کی کم ہوجاتی ہے اُتنی ہی دوسرے جسم کی قوۃ حرکت بڑہ جاتی ہے۔ اسلئے ضرب کے پیشتر جو مجموعہ دونو متحرک جسمونکی قوا یا حرکت کا ہے بعد ضرب کے بھی اُن قوتونکا مجموعہ وہی رہتا ہے۔ یہہ نتیجہ حرکت کے تیسرے قانون سے بھی ظاہر ہے کیونکہ ضرب کے لحظہ مین دونو جسمونکے عمل باہمی مقدار مین مساوی اور سمت مین ایکدوسرے کے مخالف ہوتے ہین۔ اسلئے اُنکی عمل باہمی سے جو تبدیلین دونو جسمونکی قوۃ حرکت مین پیدا ہوتین

ہین وہ بھی مساوی ہین +

(۲۲۴۱) دنیا کے کل اجسام کسیقدر لائقِ دبائو ہین یعنے اُن سب کے حجم طاقتون کے عمل سے دباے جا سکتے ہین - اور جب وہ طاقتین ہٹائی جاوین تو اجسام اپنے سابق حجم حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہین - اس کوشش مین بعضے اجسام زیادہ کامیاب ہوتے ہین اور بعضے کم دبائو کے بعد اجسام کی اپنے حجم سابقہ حاصل کرنیکی قابلیت کو لاسٹیکی کہتے ہین - یہ لاسٹیکی کسی جسم مین پورے پورے نہین پائے جاتے - مگر کئی مادے مثلاً ہاتھی دانت وغیرہ ایسے ہین کہ جس مین قریباً پوری لاسٹیکی موجود ہے - اسی لاسٹیکی کے باعث سے مضاربہ کے بعد اجسام کی حرکت مین تبدیلی واقع ہوتی ہے

بغرض سہولیت ہم فرض کرینگے کہ اجسام مضاربہ ایک ہی قسم کے مادہ کا بنے ہوئے ہین اور گیند کی طرح گول ہین +

(۲۴۳۱) فرض کرو کہ دو گیند جو ایک ہی خط مین متحرک تھے حالت مضاربہ مین آئے اگرچہ اُنکا عرصہ مضاربہ بہ نہایت قلیل ہوگا حتیٰ کہ ایک سیکنڈ کے سوین حصے سے بھی کم مگر طاقت مضاربہ اسقدر زیادہ ہوتی ہے کہ اس عرصہ قلیل مین بھی گیندون کی حرکت مین بہت تبدیلی پیدا کرتی ہے - فرض کرو کہ عرصہ مضاربہ دو حصون مین منقسم کیا گیا حصہ اول مین اجسام کے جتنے اجزا ایکدوسرے سے ٹکر کھاتے ہین دب جاتے ہین - اور رفتہ رفتہ اُنکا باہمی دباؤ بڑھتا جاتا ہے اور اس حصہ کے انجام مین دونون اجسام ایک لحظ کے واسطے گویا متحد ہوکر ایک ہی سرعت کے ساتھ حرکت کرنے لگینگے دوسرے حصہ وقت مین دونو اجسام بباعث لاسٹیکی کے

اپنے سابقہ حجم کی حاصل کرنے کی کوشش مین ایک دوسرے کے برخلاف عمل کرینگے جسکے سبب سے وہ فوراً ایکدوسرے سے علحدہ ہوکر مختلف سرعتون کے ساتھ حرکت کرنے لگین گے۔

(۱۴۴) واضح ہو کہ جب تک دو اجسام ایکدوسرے سے مس کرتے رہتے ہین تب تک ہر لحظہ مین اُنکے عمل باہمی مقدار مین برابر اور سمت مین مخالف ہوتے ہین (بموجب قانون سوم حرکت) نیوٹن صاحب نے بہت سے تجربہ کے بعد دریافت کیا ہے کہ مضاربہ کے پیشتر اول جسم کی سرعت منتسب جسکے ساتھ وہ دوسرے جسم کے قریب آتا جاتا ہے اُس سرعت متناسب سے جسکے ساتھ وہی جسم مضاربہ کی بعد دوسرے جسم سے بعید ہوتا جاتا ہے ہمیشہ ایک نسبت مستقل رکھتی ہے۔

مثلاً اگر مضاربہ کو پیشتر اول جسم کی سرعت منتسب بلحاظ دوسرے جسم کے م ہو تو گویا اس سرعت کے ساتھ یہ جسم دوسرے کے قریب آرہا ہے اور اگر مضاربہ کے بعد دوسرے جسم کی سرعت منتسب بلحاظ اول جسم کے مَ ہو تو گویا اس سرعت کے ساتھ اول جسم دوسرے سے بعید ہوتا جاتا ہے کیونکہ اس حالت مین اول جسم کی سرعت منتسب بلحاظ دوسرے جسم کے – مَ ہوگی (دیکھو حد ۶۶) اور یہ کہنا کہ ایک شے سرعت (– مَ) کے ساتھ دوسرے کے قریب آرہی ہے یا یہ کہنا کہ وہی شے سرعت (+ مَ) کے ساتھ دوسرے سے بعید ہوتی جاتی ہے ایک ہی بات ہے پس نیوٹن صاحب کے تجربہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مَ ∝ م یا مَ = ی م جہانکہ ایک مقدار مستقل ہے جسکی قیمت اجسام مضاربہ کی لاسطیقی پر منحصر ہے۔ اس مقدار کو ہم علامت لاسطیقی لینگے۔ تجربہ کثیر سے معلوم ہوا ہے کہ اس علامت کی قیمت تمام اجسام کے لئے

صفر سے زیادہ اور عدد ۱ سے کم ہوتی ہے - مگر بغرض تحقیق حسنگام پوری لالسطیق
اجسام کے لئے اسمقدار کی قیمت کو عدد ۱ اور بالکل غیر لالسطیق اجسام کے لئے قیمت صفر
فرض کر لیتے ہین *

مگر یہ صرف قیاسی ہے کیونکہ دنیا مین کوئی جسم ایسا نہین پایا جاتا جسمین لالسطیقی پوری
پوری موجود ہو یا بالکل نہ موجود ہو *

(۱۴۵) یہ بات قابل یاد رکھنے کے ہے کہ علامت لالسطیقی کوئی بالکل مستقل مقدار نہین ہے
بلکہ تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ جب اجسام کی سرعت بوقت مضاربہ بہت زیادہ
ہوتی ہے تو اس علامت کی قیمت کچھ گھٹتی جاتی ہے - مگر جب سرعت مضاربہ
بہت ہی بڑی نہو تو اس علامت کو مقدار مستقل فرض کرنے سے کوئی غلطی واقع
نہوگی *

گیندون کا مضاربہ دو قسم کا ہوتا ہے - اگر بوقت مضاربہ دونو گیندون کے مرکز
ایک ہی خط مین حرکت کرتے ہون تو اس مضاربہ کو مضاربہ مستقیم کہتے ہین - اور جب
وے ایک ہی خط مین حرکت نکرین تو اسکو مضاربہ غیر مستقیم کہتے ہین *

(۱۴۶) دو گیند جنکے اجسام ج و ج' ہین اور ایک ہی خط مین متحرک ہے ایکدوسرے
سے ٹکر کھاتے ہین تو بعد از مضاربہ انکی حرکت دریافت کرو *

فرض کرو کہ گیند ایک ہی سمت مین چل رہے ہین اور بوقت مضاربہ انکی سرعت
اس سمت مین علی الترتیب گ و گ' تھی جہان گ گ' بڑا ہے *

چونکہ اجسام بوقت مضاربہ ایک ہی خط مستقیم مین حرکت کر رہے تھے تو بعد از
مضاربہ بھی وے اسی خط مین حرکت کرتے رہینگے کیونکہ کوئی دلیل نہین ہے

کہ اس خط کے باہر چلے جائین - فرض کرو کہ بعد از مضاربہ اُنکی سرعت جداگانہ گَ$_1$ و گَ$_1$ ہین *

ظاہر ہوگا کہ اول جسم کی قوت حرکت باعث مضاربہ بقدر (گ$_1$ - گَ$_1$) ج کے کم ہو جائیگی اور دوسرے جسم کی قوت حرکت اُسی سبب سے بقدر (گَ$_2$ - گ$_2$) جَ کے بڑہ جائیگی - (اسلئے بموجب حد ۱۴۱)

$$\text{(گ}_1\text{ - گَ}_1\text{) ج = (گَ}_2\text{ - گ}_2\text{) جَ ..... (۱)}$$

اور نیز پیشتر از مضاربہ اول جسم کی سرعت منتسب بلحاظ دوسرے جسم برابر تہی (گ$_1$ - گ$_2$) کے اور بعد از مضاربہ دوسرے جسم کی سرعت منتسب بلحاظ اول جسم کے برابر ہے (گَ$_2$ - گَ$_1$) اسلئے اگر ی علامت لاسطیقی کو تعبیر کرے تو بموجب تجربہ نیوٹن صاحب کے ی (گ$_1$ - گ$_2$) = (گَ$_2$ - گَ$_1$) ---- (۲)

مساوات نمبر (۱) و (۲) سے گَ$_1$ و گَ$_2$ کی قیمتین دریافت ہوسکتی ہین یعنی

$$\text{گَ}_1 = \frac{\text{گ}_1\text{ج + گ}_2\text{جَ - یجَ (گ}_1\text{ - گ}_2\text{)}}{\text{ج + جَ}}$$

$$\text{اور گَ}_2 = \frac{\text{گ}_1\text{ج + گ}_2\text{جَ + یج (گ}_1\text{ - گ}_2\text{)}}{\text{ج + جَ}}$$

ہمنے اوپر فرض کیا ہے کہ سرعت گ$_1$ و گ$_2$ ایک ہی سمت مین اور نیز اُسی سمت کو منتسب بہی فرض کیا ہے - پس اگر مساوات مذکورہ بالا سے گَ$_1$ یا گَ$_2$ کی قیمت مقدار منفی نکلے تو اس سے یہہ سمجھ لینا چاہیئے کہ اُسکی سمت سمت مذکورہ کے مقابل ہے

(۱۴۷) مساواتون مذکورہ بالا سے کئی خاص خاص نتیجے نکل سکتے ہین ٭

(۱) فرض کرو کہ دونو گیند پورے پورے لاسطیق ہین - تو گویا $د = ۱$

$$\therefore\ گَ_۱ = \frac{گ_۱ (ج - جَ) + ۲ گ_۲ جَ}{ج + جَ}$$

$$اور\ گَ_۲ = \frac{۲ گ_۱ ج - گ_۲ (ج - جَ)}{ج + جَ}$$

(ب) فرض کرو کہ دونو گیند بالکل غیر لاسطیق ہین تو گویا $د = ۰$

$$\therefore\ گَ_۱ = \frac{گ_۱ ج + گ_۲ جَ}{ج + جَ} = گَ_۲$$

یعنی اسحالت مین دونو گیند بعد از مضاربہ متحد ہوکر حرکت کرینگے

(ج) اگر $گ_۲ = ۰$ یعنے اگر ایک متحرک گیند دوسرے ساکن گیند سے مضاربہ کرے تو

$$گَ_۱ = \frac{گ_۱ (ج - د جَ)}{ج + جَ}$$

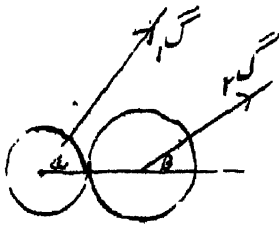
$$و\ گَ_۲ = \frac{گ_۱ ج (۱ + د)}{ج + جَ}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ ساکن گیند باعث مضاربہ کے حرکت مین آویگا اور اوّل جسم بعد از مضاربہ اپنے سمت سابقہ مین یا سمت مخالف مین حرکت کریگا بشرطیکہ $\frac{ج}{جَ}$ بڑا یا چھوٹا ہو $د$ سے اگر $\frac{ج}{جَ} = د$ تو بعد از

مضاربہ اوّل گیند ساکن ہوجائیگا اور چونکہ اس حالت مین $گ_۲ = گ_۱$ لہذا دوسرا گیند اول گیند کی سرعت کے ساتھ حرکت کرنے لگے گا ✤

(د) حالت بالا مین اگر $\frac{ج}{ج'}$ بہت کم ہو یعنے اگر ج کی قیمت بہ نسبت $ج'$ بہت زیادہ ہو تو

$$گ'_۱ = \frac{گ_۱ (ج - ج')}{ج + ج'} = \frac{گ_۱ (\frac{ج}{ج'} - ۱)}{\frac{ج}{ج'} + ۱} = - گ_۱$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ بعد از مضاربہ اوّل گیند اپنے سمت سابقہ کے مخالف لوٹ آویگا - اور اُسکے لوٹنے کی سرعت اُسکی سابق سرعت کی نسبت دگنا کم ہوگا اگر کوئی گیند کسی دیوار سے یا زمین پر آکر لگے تو اس قسم کی حرکت وقوع مین آتی ہے ✤

(۱۴۸) دو گیند مضاربہ غیر مستقیم مین آئے - مضاربہ کے بعد اُنکی حرکت دریافت کرو ✤

فرض کرو کہ عین قبل از مضاربہ گیندہاے مذکورہ جداگانہ سرعتہاے $گ_۱$ اور $گ_۲$ سے متحرک ہین جنکی سمتین گیندون کے مرکزون کے وصل کنندہ خط سے جداگانہ α اور β زاویہ بناتے ہین اور مضاربہ کے بعد اُنکی سرعتہاے $گ'_۱$ اور $گ'_۲$ ہین جنکی سمتین خط مذکورہ سے زاویہ θ اور ϕ بناتی ہیں ظاہر ہے کہ مضاربہ کا عمل مرکزون کے وصل کنندہ خط مین ہی ہوگا کیونکہ گیند

بالکل گول اور ہموار ہین اسلئے اگر ہم اُنکی سرعتون کو اُس خط مین اور اُس خط کے عمود مین منفصل کرین تو خط عمود مین اجزاء منفصلہ پر مضاربہ کا کچھہ اثر نہین ہوگا یعنے مضاربہ کے بعد بہی اجزا اسے کی قیمت وہی رہیگی جو قبل از مضاربہ تھی مگر مرکزی خط مین سرعتہا سے کے اجزاء مین مضاربہ سے ویسا ہی تغیر واقع ہوگا جیسا کہ مضاربہ مستقیم کے باب مین پیشتر بیان ہوچکا ہے پس مضاربہ کے بعد گیندون کی حرکت دریافت کرنے سے ہمین مساواتہا سے ذیل حاصل ہونگی

گ جب α = گَ۱ جب θ .... (۱)

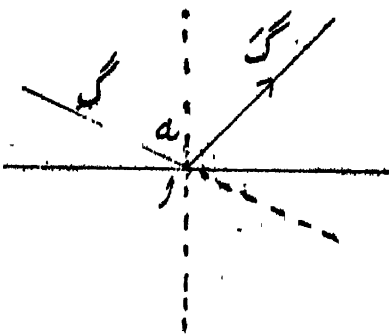
اور گ۲ جب β = گَ۲ جب θ .... (۲)

اور بموجب قاعدہ مضاربہ مستقیم کے

ج (گ۱ جم α − گَ۱ جم θ) = جَ (گَ۲ جم ϕ − گ۲ جم β) ..... (۳)

اور گَ۲ جم ϕ − گَ۱ جم θ = ع (گ۱ جم α − گ۲ جم β) ..... (۴)

ان مساوات سے گَ۱ اور گَ۲ کی قیمت اور θ اور ϕ کی قیمت بہی دریافت ہوجائینگے اس شکل کی کئی خاص حالتین بیان کرکے یہ باب تمام کیا جائیگا ۔

(۹۴) اگر کوئی گیند سرعت گ سے چلکر کسی ہموار سطح قائم سے مضاربہ غیر مستقیم مین آ لگے تو مضاربہ کے بعد اُسکی حرکت دریافت کرو ۔

فرض کرو کہ عین قبل از مضاربہ سرعت گ کی سمت اُس سطح پر عمود سے زاویہ α
بناتی ہے اور مضاربہ کے بعد گیند کی سرعت گَ ہے جسکی سمت اُس عمود کے
ساتھ زاویہ θ بناتی ہے چونکہ مضاربہ کا عمل صرف اُس خط عمود ا کی سمت
مین ہوگا اسلئے سطح کے متوازی گیند کے جزو منفصلہ گ جب α مین مضاربہ
سے کچھ تغیر واقع نہوگا مگر عمود کی سمت مین جزو منفصلہ گ جم α پر مضاربہ کا اثر
ویسا ہی ہوگا جیسا کہ مضاربہ مستقیم کے قاعدے مین بیان ہوا ٭

∴ گَ جب θ = گ جب α

اور گَ جم θ = − ء × گ جم α

∴ گَ^{2} = گ^2 (جب^2 α + ء^2 جم^2 α) .... (۱)

اور مس θ = − $\frac{1}{ء}$ مس α .... (۲)

ان مساوات سے گیند کی حرکت مضاربہ کے بعد معلوم ہوسکتی ہے
چونکہ یہان مس θ منفی ہے اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ زاویہ θ کی قیمت 90° سے زیادہ
ہوگی جیسا کہ شکل مندرجہ مین دکھلایا گیا ہے ٭

تعریف - زاویہ گ ا ب اور گَ ا بَ ان ہر دو زوایا کو زاویہ حدوثی
اور زاویہ انعکاسی کہتے ہین ٭

اگر ء = ۱ ہو تو مساوات (۲) سے مس θ = − مس α

∴ θ = ($180^\circ - \alpha$) ∴ زاویہ گَ ا بَ = زاویہ گ ا ب

گویا اس حالت مین زاویہ حدوثی و زاویہ انعکاسی باہم مساوی ہین

مثالات باب پانزدہم

(۱) اگر مساوی جسم کے دو غیر لاسطیق گیندون مین مضاربہ واقع ہو تو ثابت کرو کہ وہ اپنی سرعتونکو آپسمین تبادلہ کرلینگے

(۲) کوئی ۵ پونڈ گیند فی سکنڈ ۱۴ فٹ کی سرعت سے چلتے ہوے کسی دوسرے ۳ پونڈ گیند سے جو ۸ فٹ فی سکنڈ چلتا ہی مضاربہ مین آیا۔ علامت لاسطیقی گیندونکی ½ ہے تو مضاربہ کے بعد گیندون کی سرعتون کو معلوم کرو۔

جواب ۱۱ و ۱۳

(۳) کوئی متحرک جسم ج کسی ساکن جسم جَ کے ساتھ مضاربہ مین آیا۔ تو علامت لاسطیقی کی قیمت کیا ہونی چاہئے تاکہ مضاربہ کے بعد جسم جَ ساکن ہوجاوے

جواب $\frac{ج}{جَ}$

(۴) کوئی تین پونڈکا گیند جو سرعت ۱۴ سے متحرک تھا ایک ۵ پونڈ گیند کے ساتھ جو اُسکے سمت مخالف مین سرعت ۸ سے متحرک تھا مضاربہ مین آیا۔ علامت لاسطیقی ی = ½ تو بعد مضاربہ اُنکی سرعتونکو دریافت کرو٭

جواب ۶ $\frac{۵}{۸}$ - اور ۴ $\frac{۳}{۸}$

(۵) کوئی گیند کسی سطح پر حدوثی کی ساتھہ گرا اور ۳۰° زاویہ انعکاسی کے ساتھہ لوٹ گیا تو گیند کی علامت لاسطیقی دریافت کرو٭ جواب ⅓

(۶) ۲ پورے لاسطیق گیند جنکے اجسام کی نسبت ½ ہے اور جو مساوی سرعتون کے ساتھ مخالف سمتون مین متحرک ہین مضاربہ مین آسکے تو ثابت کرو کہ مضاربہ

کے بعد بڑے جسم والا گیند ساکن ہو جائیگا +

(۷) کوئی گیند ہ ارتفاع سے کسی ہموار افقی پر گرا اور بار بار اوپر اچھلنے کے بعد حالت سکون مین آگیا اگر گیند کی علامت لاسطیقی ع ہو تو اُسکے کل فاصلون طے شدہ کا مجموعہ دریافت کرو +

جواب $\frac{۱ + ع^۲}{۱ - ع^۲} \times$ ہ

(۸) کوئی گیند θ میلان کی سطح مائل کے ہ ارتفاع سے پھسلتی ہوا اُسکے قاعدہ پر سطح افقی کے ساتھ مضاربہ مین آیا تو اُس سطح افقی پر گیند کی وسعت دریافت کرو + جواب ۲ ع ہ جب^۲ θ

(۹) ایک غیر لاسطیقی جسم متحرک ہو کر ایک دوسرے ساکن جسم سے جو اُسکا دو چند ہے مضاربہ مین آیا تو ثابت کرو کہ مضاربہ کے بعد اول جسم کی سرعت ایک تہائی گہٹ جائے گی +

(۱۰) ۲ جسم جو ایک ہی سمت مین جداگانہ سرعتہا ے ۷ اور ۵ سے متحرک تھے مضاربہ مین آئے بعد از مضاربہ اُنکی سرعتین جداگانہ ۵ اور ۶ ہین تو علامت لاسطیقی کی قیمت دریافت کرو + جواب $\frac{۱}{۲}$

(۱۱) دو جسم مخالف سمتون مین متحرک ہو کر مضاربہ مین آئے ثابت کرو کہ اگر عین قبل از مضاربہ اُنکے قوا سے حرکت مساوی ہون تو مضاربہ کے بعد بہی قوا سے حرکت مساوی رہینگے +

(۱۲) دو جسم مساوی سرعتون سے مخالف سمتون مین حرکت کرتے ہوئے مضاربہ مین آئے ـ بعد مضاربہ کے ایک جسم اپنی سرعت سابق سے لوٹ گیا اور دوسرا اپنی نصف سرعت سے اُسی سمت مین چلا تو ثابت کرو کہ اُن اجسام مین سے

ایک دوسرےکا چوگنا ہی اور انکی علامت لاسطیقی $\frac{1}{4}$ ہے +

(۱۳) ایک متحرک جسم $ج_1$ ایک ساکن جسم $ج_2$ کے ساتھ مضاربہ مین آیا مضاربہ کے بعد اُن دونون کی سرعتین مساوی ہوگئین تو علامت لاسطیقی دریافت کرو

جواب $\frac{ج_2}{ج_1 - ج_2}$

(۱۴) $ج_1$ اور $ج_2$ و $ج_3$ تین اجسام ہین اُن مین سے اوّل اور سیوم ایک ہی مادہ کا بنا ہوا ہے - ابتدا مین یہ تینون جسم ساکن تھے بعد ازان جسم $ج_1$ متحرک ہوکر $ج_2$ سے مضاربہ مین آیا اور $ج_2$ اُس مضاربہ سے متحرک ہوکر $ج_3$ سے مضاربہ مین آیا تو علامت لاسطیقی کیا ہونی چاہیئے تاکہ جسم $ج_3$ کی سرعت بعد از مضاربہ ویسی ہی ہو جیسی کہ اُس حالت مین ہوتی جبکہ $ج_2$ موجود نہوتا اور $ج_1$ ہی $ج_3$ کے ساتھ مضاربہ مین آتا -

جواب $\frac{ج_1 ج_2 ج_3}{ج_2 (ج_1 + ج_3)}$

(۱۵) کئی اجسام سلسلہ ہندسیہ مین ہین جنکی نسبت مشترکہ $م$ ہے ایک ہی خط مستقیم مین رکھے ہوئے ہین - جسم اول کسی سرعت کے ساتھ متحرک ہوکر دوسرے جسم سے مضاربہ مین آیا اور دوسرا اُس مضاربہ سے متحرک ہوکر تیسرے سے اور تیسرا چوتھے سے مضاربہ مین آیا علیٰ ہذا القیاس ثابت کرو کہ بعد از مضاربہ اُن اجسام کی سرعتین ایک سلسلہ ہندسیہ مین ہونگی جنکی نسبت مشترکہ $\frac{1}{1+م}$ ہے +

(١٦) مثال ۱۵ مین اجسام کے درمیان کیا نسبت ہونی چاہیے تاکہ مضاربہ کے بعد ہر ایک جسم کی سرعت زائل ہوجاے ◆

جواب $\text{ج}_۲ = \frac{\text{ج}_۱}{\text{ع}}$ ، $\text{ج}_۳ = \frac{\text{ج}_۲}{\text{ع}}$ وغیرہ

(١٧) ایک متحرک جسم ج ایک ساکن جسم جَ کے ساتھ زاویہ ہ پر ٹکرا کر مضاربہ مین آیا تو قبل از مضاربہ اور بعد از مضاربہ اسکی سمت حرکت کے درمیان کا زاویہ معلوم کرو ◆

جواب $\frac{\text{ع}+۱}{۲} \times \frac{\text{جَ جیب}^۲\text{ه}}{\text{ج} + \text{ع جَ جم}^۲\text{ه}}$

(١٨) کوئی جسم کسی دوسرے مساوی جسم ساکن کے ساتھ غیر مستقیم مضاربہ مین آیا اور دونو اجسام پوری لاسطیقی ہین اور قبل از مضاربہ اور بعد از مضاربہ اصلی جسم کی خطوط حرکت کا درمیانی زاویہ ٦٠° کا ہے تو مضاربہ کے بعد اسکی سرعت کیا ہوگی ۔ جواب سرعت سابق کا نصف

(١٩) کوئی جسم سطح افقی کے کسی نقطہ سے میلان ہ کے ساتھ سرعت گ سے مقذوف ہوا اور سطح افقی پر گر کر بار بار اچھلتا ہوا چلا گیا جسم کی علامت لاسطیقی ع ہے تو سطح افقی مین اسکی کل وسعت اور کل وسعت کا وقت تاخت اور ن ویں دفعہ اچھلنے مین اسکا میلان دریافت کرو ۔

جواب $\frac{\text{گ}^۲ \text{جیب} ۲\text{ه}}{\text{ق}(۱-\text{ع})}$ اور $\frac{۲\text{گ جیب ه}}{\text{ق}(۱-\text{ع})}$ اور $\text{ظل}^{-۱}(\text{ع}^{\text{ن}} \text{ظل ه})$

(٢٠) کوئی جسم ه میلان کے ساتھ کسی نقطہ معین سے ایک دیوار کی طرف جو کہ

اُس نقطہ سے ق فاصلہ پر واقع ہو بمقدار ف ہوا اور اُس دیوار سے ٹکرا کر پھر نقطہ
ق۔ف پر لوٹ آیا تو جسم کی سرعت قذف کیا تھی ؟

جواب $\frac{ق\,ف\,(۱ + \frac{۱}{ع})}{ع\,ب\,۲ق}$

(۲۱) کوئی پورا السطیق گیند کسی دو دیوار رستگے مابین کسی نقطہ معین سے اور سرعت معین کے ساتھ مقذوف ہوا اور ہر دو دیواروں کے ساتھ ایک ایک دفعہ ٹکرا کر نقطہ قذف پر لوٹ آیا تو اُسکی سرعت قذف کیا تھی +

(۲۲) کسی انٹا کھیلنے کی میز پر جو کہ عین سطح افقی پر رکھے ہوئے ہے ایک بالکل السطیق گیند کسی نقطہ معین سے سرعت معین کے ساتھ متحرک کیا گیا اور چاروں کناروں سے ایک ایک دفعہ ٹکرا کر نقطہ قذف پر لوٹ آیا تو ثابت کرو کہ گیند کی حرکت ایک ایسی متوازی الاضلاع شکل بنا دیگی کہ جسکے اضلاع میز کے وتروں کے متوازی ہونگے +

Secant of an angle	زاویہ کا متقاطع (قع)
Space	فاصلہ
Terms of a series	ارام سلسلہ
Time of flight of a projectile ...	وقت تاخت
Unit	اکائي
Uniform	یکساں-مستوی
Uniform force	طاقت مسلسل
Variable	غیر یکساں-متبدل
Velocity	سرعت
,, resultant or actual ...	واقعی یا حاصل سرعت
,, acquired or generated ...	سرعت محصلہ
Velocity, resolved part of ...	جزو منفصلہ
,, angular	سرعت الزاویہ
,, initial	سرعت ابتدای
,, relative	سرعت منتسب
Vertical line ...	خط سمت الراس یا خط راس
,, plane	سطح راس
Vertex	راس چوٹي
Volume	حجم
Weight	وزن
,, real	وزن حقیقی یا اصلی
,, apparent	وزن ظاہري

Motion sliding	پھسلنا
Negative	منفي
Number	مقدار-عدد
Nth. unit	ن وین اکائي
Oscillation	جنبش
Ordinate of a point	نقطه کا معین
Parabola	پیرابولا-قریب البیضوي
Pendulum	شاقول
Pole of the earth	قطب زمین
Positive	مثبت
Pressure	دباؤ
Principal axis of a curve ...	محور عظیم
Proportional	متناسب
,, inversely	متناسب علي العکس
Projection	قذف-خذف
Projectile	مقذوف-مخذوف
Progression	سلسله
Pully	پھرکي-چرکھي-گھرني
Rate	حساب
Ratio	نسبت
Range of a projectile	وسعت مقذوف
Resistance	مزحمت استقامت
Secant or chord	وتر

Equator	خط استوا
Equilibrium	حالت سکون - اعتدال
Focus	نقطہ ماسکہ
Force	طاقت
Friction	ٹھکڈک
Graduated	درجہ لگایا ہوا
Gravitation	کشش ثقل
Height of a point or plane ...	ارتفاع
Horizontal line	خط افقی
Horizontal plane	سطح افقی
Inclined plane	سطح مائیل
Inclination of a plane	میلان
Latitude of a place	مقام کا عرض
Laws of motion	حرکت کے قوانین
Line of quickest descent	خط سریع النزول
Line of slowest descent	خط بطی النزول
Locus of a point	مقام النقاط
Mass	جسم
Matter	مادہ
Maximum	عظیم اطول
Momentum	قوت حرکت
Motion	حرکت
„ rotatory	حرکت مدوری

GLOSSARY OF TECHNICAL TERMS.

لغت الفاظ*

Acceleration	اسراع
Action and reaction	فعل فاعلي و فعل انفعالي
Abscissa of a point	نقطه کا محدده
Angle of Incidence	زاويه حدوثي
Angle of Reflexion	زاويه انعکاسي
Average or mean	اوسط
Axis	محور
Body	شئي
Body acted on by force	شئی معموله
Central or centripetal force ...	طاقت مرکزي
Centrifugal force	قوت هاربه
Circular measure	گول ناپ
Co-efficient of elasticity	علامت لاسطيقى
Co-efficient of friction	علامت تحکيک
Collision or Impact	مضاربه
Collision direct	مضاربه مستقيمه
Collision oblique	مضاربه غير مستقيم
Constant in magnitude	مستقل
Compound motion	حرکت مرکب
Elasticity	لاسطيقى

whole the of subject-matter, properly belonging to it. Co
examples given at the end of chapters will furnish abu
exercise to the students. Everywhere, prominence has been
to the co-ordinate method of treatment, with a view to im
the student, at this early stage of his study, with the great in
tance of that method as a means of mathematical analysis.
author's experience as a mathematical teacher for many
justifies his expectation that this arrangement will be f
convenient and useful.

The author has to record his thanks to his friends
pupils—Lala Aya Ram, B. A., Muhammad Husain, and Dil
Ali Shah, for the valuable assistance they have given hin
compiling the present work. Nor can he omit to acknowledg
great obligation he is under to Maulvi Ghulam Mustafa, of
Oriental College, Lahore, for the ready advice and help which
rendered whilst the work was passing through the press.

LAHORE GOVT. COLLEGE,
1st *November* 1879.

PREFACE.

The aim of the author in compiling the present work is to co-operate with the Panjab University College in their laudable attempt to impart Western knowledge through the medium of the Vernacular. While recognizing from the beginning the necessity of publishing works in the Vernacular, that learned body has lately directed its attention more particularly to the translation and adaptation of Mathematical works, the want of which has hitherto been very seriously felt by the higher students on the Vernacular side, who have had no means to compete on equal terms with their English-knowing comrades in the field of Mathematics. The author had, with concern, watched this anomalous state of things during the five years of his stay in Lahore, and it is only when his expectation of seeing the work undertaken by abler hands proved as distant as ever, that he has ventured to supply the want in the form now before the public.

The author is aware that there are many inaccuracies, if not positive mistakes, both in the substance as well as in the arrangement of the present work. He can only adduce in excuse that he had no beaten track to follow. The greatest difficulty, for instance, was encountered in rendering exact the technical terms in Urdu. As very little help could be obtained under this head from former authors, either in Arabic or Urdu, the author was obliged in many places to adopt or coin words of his own; and although such adoption was made by the advice and approval of some of the most learned maulvis to whom the author had access, still he is himself not satisfied with many terms, and can only regard them as tentative and liable to be replaced by more suitable ones as time and experience suggest. The author claims the indulgence of the public to such mistakes on the plea that it is always easier to improve a subject than to start it, and he will thankfully receive any suggestions for improvement and try to correct himself in a future edition of the work, if called for.

A glossary of technical terms, with their English equivalents, is appended at the end for easy reference.

The author claims no originality in the preparation of the present work. He has freely availed himself of almost all the available sources of information on the subject, particularly the works of Todhunter, Goodwin, Wilson, Parkinson, Walton and others. Only those portions of the subject have been dealt with as have particular reference to the High Proficiency Examination of the Panjab University College. The arrangement of the chapters has been carefully made and each has been made to include the